问题 3：不变理论中的轨道陈类方法

2021 级省身班　朱凯

摘　要

本文围绕不变理论中的轨道陈类方法，从复向量丛的陈类出发，阐明轨道陈类的命名背景，并给出不变子环有限生成元的具体构造.

1　轨道陈类的定义及其命名背景

轨道陈类方法是不变理论中构造不变子环生成元的重要方法，核心的观察来源于 n 元置换群 S_n 作用下的不变子环，$\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n}=\mathbb{F}[s_1,\cdots,s_n]$，这里 $s_k=\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$，注意到对于 S_n 的表示 $\rho: S_n\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$，有任何 x_i，存在 σ 使得 $\sigma.x_1=x_i$，因此可知 $o[x_1]$ 即其轨道为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，因此 s_k 均可以视为其轨道内元素的对称组合，由此我们可以抽象出一般有限群 G 的对应组合，也就是轨道陈类的概念.

定义 1.1 (轨道陈类)**.** 设 $\rho: G\hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 为有限群 G 的忠实表示，对 $\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_n]$ 设

$$o[x_i]=\{f_{i1},\cdots,f_{ik_i}\} \tag{1}$$

为 x_i 在 G 作用下的轨道，对轨道中的元素，我们考虑

$$\begin{aligned} c_1(x_i)&=f_{i1}+\cdots+f_{ik_i},\\ c_2(x_i)&=\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq k_i} f_{i\alpha}f_{i\beta},\\ &\cdots\\ c_{k_i}(x_i)&=f_{i1}\cdots f_{ik_i}, \end{aligned} \tag{2}$$

*这些多项式 $c_1(x_i)$，$c_2(x_i),\cdots,c_{k_i}(x_i)$ 称为 x_i 的***轨道陈类***，其中 k_i 表示 x_i 的轨道长度，也称 $c_{k_i}(x_i)$ 为 x_i 的***最高陈类***，记为 $c_{\mathrm{top}}(x_i)$.*

从直观上来看，轨道陈类的概念直接源自于对 S_n 作用下的不变子环的模仿，事实上更深刻的，其与陈省身先生提出的陈类 (Chern Class) 有着更密切的关联，为了阐明这一背景，我们先铺垫若干前置概念：

定义 1.2 (复向量丛的陈类)**.** *设 (E,π,M) 为复向量丛，其中 M 为底流形，$\pi: E\to M$ 为投影映射，且有每个纤维 $\pi^{-1}(x)$ 为一个 n 维复向量空间，也即 $\mathbb{C}^n$，进一步，对任意这样的复向量丛 E，我们称一个 M 上同调群中的元素 $c_i(E)\in H^{2i}(M,\mathbb{R})$ 为 E 的***第 i 个陈类***，如果其满足如下四条公理：*

1. *初始条件：第 0 个陈类为 1，即 $c_0(E)=1$；*

2. 自然性：对流形之间的光滑映射 $f: M' \to M$，以及 M 上复向量丛 E，若 $c_i(E)$ 为 E 的第 i 个陈类，则有 $f^*c_i(E)$ 为 $H^{2i}(M',\mathbb{R})$ 中的元素，且其恰为 M' 上拉回丛 f^*E 的第 i 个陈类，也即 $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$；

3. 可加性：对于 M 上复向量丛 E_0, E_1，设其 *Whitney* 求和得到的复向量丛为 $E = E_0 \oplus E_1$，则规定 $c_i(E) = \sum_{i=0}^{k} c_i(E_0) \wedge c_{k-i}(E_1)$，这事实上给出了一个递推关系；

4. 归一化条件：由上一条件陈类需要从维数较小的丛递推得到，因此我们需要预先设置好最小丛也即一维线丛的陈类，考虑底流形为 $\mathbb{CP}^1$ 的线丛 $\mathbb{C}^2$，定义 $c_1(\mathbb{C}^2)$ 的积分为 $\int c_1(\mathbb{C}^2) = -1$，这便是归一化的来源.

上述定义仅仅只是朴素叙述了一遍一般陈类的定义，抛开细枝末节的概念，我们从上述定义中无法看出一般陈类是否存在，更看不出和轨道陈类之间的联系，注意到轨道陈类与齐次对称多项式之间的密切联系，我们下面用更具体的方式给出陈类的定义 (更准确地，是构造)，来回答这两个问题，在这个构造过程中，自然出现的齐次对称多项式便阐明了轨道陈类的来源.

为了给出任意复向量丛的陈类，我们先从复向量丛的结构群 G 出发，考虑其李代数中元素 $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$，又结构群可以看做是向量丛的纤维上的线性映射构成的群，因此 $\mathfrak{X}$ 是一个线性映射，进而有如下行列式展开：

$$\det\left(I + \frac{\mathrm{i}\lambda}{2\pi}\mathfrak{X}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathfrak{X})\lambda^k = 1 + f_1(\mathfrak{X})\lambda + f_2(\mathfrak{X})\lambda^2 + \cdots, \tag{3}$$

下面我们说明 f_k 是关于 ξ^i_j 的齐次多项式函数，这里 ξ^i_j 是指取定表示空间后，$\mathfrak{g}$ 中每个元素 $\mathfrak{X}$ 可以看作是矩阵，而 ξ^i_j 就是取 $\mathfrak{X}$ 第 i 行 j 列的元素，而显然行列式是 ξ^i_j 相加相乘得到的，进而为多项式函数，事实上再考虑 $f_k(t\mathfrak{X})$，则有

$$\det\left(I + \frac{\mathrm{i}\lambda t}{2\pi}\mathfrak{X}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathfrak{X})(t\lambda)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k f_k(\mathfrak{X})\lambda^k, \tag{4}$$

因此可知 $f_k(t\mathfrak{X}) = t^k f_k(t\mathfrak{X})$，故 f_k 均为齐次多项式函数.

借助上述一般性的论述，我们回到复向量丛上来，考虑任意给定 E 所对应主丛的联络 ω，进而又有一个曲率形式 Ω，对任意切向量 X, Y，有 $\Omega(X,Y) \in \mathfrak{g}$，从而我们代入公式 (3)，则不难证明 f_k 可以对应一个 k 重线性函数 g_k，也即有

$$f_k(\Omega(X,Y)) = g_k(\underbrace{\Omega(X,Y), \Omega(X,Y), \cdots, \Omega(X,Y)}_{k\text{个}}), \tag{5}$$

从而进一步我们可以得到一个主丛上的 $2k$ 形式，$g_k(\Omega)$，可定义为

$$g_k(\Omega)(X_1, X_2, \cdots, X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!}\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma\ g_k\left(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \cdots, \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})\right), \tag{6}$$

进一步可以验证，$g_k(\Omega)$ 可以诱导出底流形 M 上的 $2k$ 形式 $\overline{g_k}(\Omega)$，从而可知其对应的代表元恰好就是 $H^{2k}(M,\mathbb{R})$ 中的元素，如果我们按照上述一般复向量丛的陈类定义，我们可以得到确实其所对应的代表元即为第 k 个陈类 $c_k(E)$.

综合以上讨论，我们可以知道一般的陈类是可以通过一个齐次多项式函数诱导得来，因此在轨道陈类中，其之所以被称为轨道自然是因为其用 x_i 中轨道元素生成，而陈类则可以理解为由齐次多项式函数生成，因此这个命名背景便和一般的陈类紧紧联系起来.

事实上，对于特殊的域，如特征为 p 的域 $\mathbb{F}_p$，关于轨道陈类的缘来还有种解释，来自 [3]，设 $V=\underbrace{\mathbb{F}_p\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_p}_{n}$，从而设 BV^* 是 V 对偶空间 V^* 的分类空间，熟知

$$H^*(BV^*,\mathbb{F}_p)\cong E(\beta^{-1}V)\otimes P(V), \tag{7}$$

这里 $P(V)$ 表示 V 上的多项式代数，E 是外代数函子，β 为 Bockstein 算子，则 G 在 V 上的作用可以诱导出在 BV^* 进而在 $H^*(BV^*,\mathbb{F}_p)$ 的作用，从而可视不变子环 $P(V)^G$ 为 $H^*(BV^*,\mathbb{F}_p)$ 的子代数，对任意 $v\in V$，我们可以构做出复线丛 $E_v=\lambda_v\downarrow BV^*$，且 $c_1(E)=v$，并且对 G 在 V 上作用的轨道 B，考虑 G 向量丛

$$\xi_B=\bigoplus_{v\in V}E_v=\bigoplus_{v\in V}\lambda_v\downarrow BV^*, \tag{8}$$

从而在上述记号下，轨道 B 在 $P(V)^G$ 中的轨道陈类，对应于向量丛 $\xi_B\downarrow BV$ 的陈类.

2 基于轨道陈类的有限生成元的构造

在 [2] 中已经证明过如下定理:

定理 2.1. *设 $\rho:G\hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 为有限群 G 的忠实表示，$\mathbb{F}$ 特征为 0，则其不变子环 $\mathbb{F}[V]^G$ 是由轨道陈类 $c_i(l)$，任意 $l\in V^*$ 生成的.*

这表明轨道陈类已经足以生成不变子环，但是由于 V^* 中元素有无限个，结合每个不变子环总是有限生成的，所以这表明事实上，并不需要用到所有轨道陈类，只需要用到有限个即可生成不变子环，下面我们就讨论如何利用轨道陈类构造出不变子环的有限生成元.

直接考虑从陈类中挑选出有限个是较为困难的，但上文中我们已经提到过，对于置换群 S_n 的不变子环，有限生成元恰为全体初等对称多项式，因此我们考虑模仿这个出发，将 $\mathbb{F}[V]^G$ 中的群 G 作用向置换群作用靠近.

设 $|G|=d$，且 $G=\{g_1,\cdots,g_d\}$，考虑

$$X=\{x_{ij}|1\leq i\leq d,1\leq j\leq n\} \tag{9}$$

生成的多项式代数 $\mathbb{F}[X]$，则对 $V=\{x_j|1\leq j\leq n\}$，设 G 在 $\mathbb{F}[X]$ 上的群作用满足若 $gg_i=g_k$，则 $gx_{ij}=x_{kj}$，从而可以定义出

$$\eta_G:\mathbb{F}[X]\to\mathbb{F}[V],\quad x_{ij}\mapsto g_ix_j, \tag{10}$$

从而不难看到这是一个满的 $\mathbb{F}$ 代数同态，进一步我们有

定理 2.2 (Noether 映射)**.** *η_G 诱导出映射 $\eta_G^G:\mathbb{F}[X]^G\to\mathbb{F}[V]^G$，且 $\eta_G^G(f)=\eta_G(f)$，称其为 Noether* **映射**，*且为满射.*

证明可以参考 [2]，因此这个定理事实上告诉我们，为了寻求 $\mathbb{F}[V]^G$ 的有限生成元，我们只需要找到 $\mathbb{F}[X]^G$ 的有限生成元，其在 Noether 映射的像即为所求，而注意到 G 在 X 上的作用为置换作用，从而将 X 排列成矩阵 $[x_{ij}]_{1\le i\le d,1\le j\le n}$，则对第 j 列 $X(j)=\{x_{1j},\cdots,x_{dj}\}$，可知 G 在 $\mathbb{F}[X]$ 上的作用是保持 $X(j)$ 中元素同步变化的，进而有

$$\mathbb{F}[X]^{S_d}\hookrightarrow\mathbb{F}[X]^G\hookrightarrow\mathbb{F}[X], \tag{11}$$

从而我们可以将 Noether 映射限制在 S_d 作用的不变子环上，事实上我们恰好有

定理 2.3. *限制在 $\mathbb{F}[X]^{S_d}$ 上的 Noether 映射 $\eta_G^G|:\mathbb{F}[X]^{S_d}\to\mathbb{F}[V]^G$ 是满射.*

现在经过上一定理的进一步转化，我们为了找到有限生成元，只需要从 $\mathbb{F}[X]^{S_d}$ 中考虑即可，为了给出具体构造，我们引入极化的概念，设 $I=(i_1,\cdots,i_n)$ 为 n 元自然数组，且满足 $|I|=i_1+\cdots+i_n\le d$，进一步对每个 j，从 $X(j)$ 中选择 i_j 个不同元素 $x_{k_1j},\cdots,x_{k_{i_j}j}$，则对于他们的乘积

$$\prod_{j=1}^{n}x_{k_1j}\cdots x_{k_{i_j}j}\in\mathbb{F}[X] \tag{12}$$

考虑其在 S_d 作用下的轨道元素之和，也即其对应的第一轨道陈类，记为 $s(I)$，称为 I 阶**极化基本对称函数**，进一步设 $\eta_G^G|(s(I))\in\mathbb{F}[V]^G$ 为 $c(I)$ 称为 I 阶**极化陈类**，注意到 I 只有有限个，因为满足 $i_1+\cdots+i_n\le d$ 的解有限，从而 $c(I)$ 有限.

那么注意到 $c(I)$ 全体恰为有限个轨道陈类，因此结合一开始的期待，我们希望这就是 $\mathbb{F}[V]^G$ 的有限生成元，幸运的是如我们所愿，这便是符合要求的具体构造，而证明的关键在于说明全体极化基本对称函数 $s(I)$ 生成 $\mathbb{F}[X]^{S_d}$，具体证明也可以在 [2] 中找到.

为了进一步阐明上述基于轨道陈类的有限生成元的构造方式，我们选取一例进行说明：

例 2.4. *考虑 $\rho:\mathbb{Z}_3\to\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$，$1\mapsto\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$，设 $g_1=g=\rho(1)$，$g_2=g^2=\rho(2)$，且 $g_3=e=g^3=\rho(3)$，从而对 $\eta_{\mathbb{Z}_3}:\mathbb{F}[x_{11},x_{12},x_{21},x_{22},x_{31},x_{32}]\to\mathbb{F}[x_1,x_2]$，且*

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbb{Z}_3}(x_{3j})&=x_j\quad j=1,2\\ \eta_{\mathbb{Z}_3}(x_{2j})=g^2(x_j)&=\begin{cases}-x_2 & j=1\\ x_1-x_2 & j=2\end{cases},\\ \eta_{\mathbb{Z}_3}(x_{1j})=g(x_j)&=\begin{cases}-x_1+x_2 & j=1\\ -x_1 & j=2\end{cases},\end{aligned} \tag{13}$$

从而对 $G=\mathbb{Z}_3$，我们不难有如 $\eta_G^G|(x_{11}x_{12}+x_{21}x_{22}+x_{31}x_{32})=x_1^2-x_1x_2+x_2^2$.

注意到 $|G|=3$，从而 $I=(i_1,i_2)$ 满足 $i_1+i_2\le 3$ 的共有 $(0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$ 这 9 种可能，我们以 $i_1=2,i_2=1$ 为例，对 $X(1)=\{x_{11},x_{21},x_{31}\}$，$X(2)=\{x_{12},x_{22},x_{32}\}$，选取 $X(1)$ 中 $i_1=2$ 个元素，如 x_{11},x_{21}，从而 $X(2)$ 中选取一个 x_{32}，从而对于乘积 $x_{11}x_{21}x_{32}$，其对应的轨道和 $s(I)=x_{11}x_{21}x_{32}+x_{31}x_{21}x_{12}+x_{11}x_{31}x_{22}$，进而其对应的极化陈类 $c(I)=-x_1^3-x_2^3+3x_1^2x_2$，故仿照上述流程，可以求得所有 (但有限个) 轨道陈类 $c(I)$ 作为生成元.

3 总结

本文首先回顾了轨道陈类的定义，并且从一般复向量丛的陈类出发，指出齐次对称多项式在两个陈类中的共通性，进而阐明命名背景，并且对特殊的域，具体构造出一个复向量丛使其陈类恰为对应的轨道陈类. 进一步，从文献 [2] 出发，逐步转化，基于轨道陈类，给出了不变子环的有限生成元，并以全体极化陈类 $c(I)$ 的形式给出了具体构造.

参考文献

[1] 马天. 流形拓扑学——理论与概念的实质. 北京：科学出版社，2010.

[2] Mara D.Neusel.Invariant Theory.American Mathematical Society，2006.

[3] Larry Smith, R.E. Stong.On the invariant theory of finite groups: Orbit polynomials and splitting principles, *J.Algebra* **110**(1987),134-157.