复几何期末作业：Kodaira 消灭与嵌入定理

2021 级数学省身班　朱凯

2025 年 4 月 3 日

摘要

本文主要介绍 Kodaira 消灭与嵌入定理.

目录

1 预备知识

我们在这一节中回顾复流形与全纯向量丛上的微分几何所需要的定义与结果，同时也引入并固定全文所使用的记号.

1.1 Kähler 流形

定义 1.1 (Hermitian 流形)**.** 设 X 为一个复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}} X = n$，复结构记作 $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TX))$. 如果其上的黎曼度量 g 满足与复结构 J 相容，也即

$$g(Ju, Jv) = g(u, v), \quad \forall u, v \in \Gamma(TX),$$

则称 (X, g) 是一个 ***Hermitian* 流形**.

对于黎曼度量 g，我们可以将其 $\mathbb{C}-$ 双线性的延拓至 $TX \otimes \mathbb{C}$ 上，同时也可以将复结构 J 进行 $\mathbb{C}-$ 线性延拓，回忆我们有：

- $TX \otimes \mathbb{C} = \{u + \sqrt{-1}v : u, v \in \Gamma(TX)\}$，则对 $Z = \mathrm{Re}(Z) + \sqrt{-1}\mathrm{Im}(Z) \in TX \otimes \mathbb{C}$，我们可以定义其共轭为 $\overline{Z} := \mathrm{Re}(Z) - \sqrt{-1}\mathrm{Im}(Z)$.
- $TX \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$，其中
  - $T^{1,0}X = \{u - \sqrt{-1}Ju : u \in TX\}$，满足 $J|_{T^{1,0}X} = \sqrt{-1} \cdot \mathrm{id}$.
  - $T^{0,1}X = \{u + \sqrt{-1}Ju : u \in TX\}$，满足 $J|_{T^{0,1}X} = -\sqrt{-1} \cdot \mathrm{id}$.
- 我们称 $\mathcal{T}X := T^{1,0}X$ 为 X 的**全纯切丛**.
- $\bigwedge^1 X \otimes \mathbb{C} = \bigwedge^{1,0} X \oplus \bigwedge^{0,1} X$，其中
  - $\bigwedge^{1,0} X = (T^{1,0}X)^* = \left\{\omega - \sqrt{-1}\omega \circ J : \omega \in \bigwedge^1 X\right\}$，且对 $\xi \in \bigwedge^{1,0} X$，有 $\xi|_{T^{0,1}X} \equiv 0$.
  - $\bigwedge^{0,1} X = (T^{0,1}X)^* = \left\{\omega + \sqrt{-1}\omega \circ J : \omega \in \bigwedge^1 X\right\}$，且对 $\xi \in \bigwedge^{0,1} X$，有 $\xi|_{T^{1,0}X} \equiv 0$.

  利用 $\bigwedge^k(E \oplus F) = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^p E \otimes \bigwedge^q F$，我们可以定义 $\bigwedge^{p,q} X := \left(\bigwedge^{1,0} X\right)^{\otimes p} \bigotimes \left(\bigwedge^{0,1} X\right)^{\otimes q}$，则有 $\bigwedge^k X \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} X$.
- $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) := \Gamma\left(\bigwedge^k X \otimes \mathbb{C}\right)$，以及 $\mathcal{A}^{p,q}(X) := \Gamma\left(\bigwedge^{p,q} X\right)$.
- 我们称 $\Omega_X := \bigwedge^{1,0} X = (\mathcal{T}X)^*$ 为 X 的**全纯余切丛**，且记 $\Omega^p_X := \bigwedge^p \Omega_X = \bigwedge^{p,0} X$，以及**典范线丛** $K_X := \det(\Omega_X) = \Omega^n_X = \bigwedge^{n,0} X$.

注 1.2. *若 (X, g) 为 Hermitian 流形，则容易看到 $g(T^{1,0}, T^{1,0}) = g(T^{0,1}, T^{0,1}) = 0$.*

因此对于 Hermitian 流形 (X, g)，其可以诱导 X 上的全纯切丛 $\mathcal{T}X = T^{1,0}X$ 上的一个 Hermitian 度量 h，其中

$$h(Z, W) := g\left(Z, \overline{W}\right), \quad \forall Z, W \in \mathcal{T}X.$$

定义 1.3 (Kähler 流形)**.** 设 (X, g) 为 *Hermitian* 流形，称 $\omega_g := g(J\cdot, \cdot)$ 为 (X, g) 上的**基本形式**，若 $d\omega_g = 0$，则称 X 为 ***Kähler* 流形**，ω_g 为 ***Kähler* 形式**.

注 1.4. 容易证明对任何 *Hermitian* 度量 g，基本形式 ω_g 均是实的 $(1,1)-$ 形式，也即 $\overline{\omega_g} = \omega_g$，且 $\omega_g \in \mathcal{A}^{1,1}(X)$.

在 Kähler 流形上，我们可以定义如下算子：

定义 1.5. 设 (X, ω_g) 为 n 维 *Kähler* 流形，则有

- ***Lefschetz*** 算子 $\mathrm{L} : \bigwedge^{p,q} X \to \bigwedge^{p+1,q+1} X$，其中 $\alpha \mapsto \alpha \wedge \omega_g$.
- 视 X 为 $2n$ 维可定向实流形，则对度量 g，可以定义 ***Hodge*** $*-$ **算子**：$* : \bigwedge^{p,q} X \to \bigwedge^{n-q,n-p} X$.
- **对偶** ***Lefschetz*** **算子** $\Lambda : \bigwedge^{p,q} X \to \bigwedge^{p-1,q-1} X$，其中 $\Lambda := *^{-1} \circ \mathrm{L} \circ *$.

与此同时，回忆我们对于一般的 Hermitian 流形 (X, g)，也有一些基本的微分算子：

- $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$，其中 $\partial : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p+1,q}(X)$，以及 $\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X)$.
- 对偶算子 $\mathrm{d}^* := - * \circ \mathrm{d} \circ *$，以及 $\partial^* := - * \circ \overline{\partial} \circ *$ 和 $\overline{\partial}^* := - * \circ \partial \circ *$.
- **Laplace 算子** $\Delta := \mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$，以及 $\Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial$ 和 $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$.

这些算子之间并不孤立，事实上我们有如下的重要恒等式：

定理 1.6 (Kähler 恒等式)**.** 设 (X, ω_g) 为 *Kähler* 流形，则在 $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ 上，有

- $[\Lambda, \mathrm{L}] = (n - p - q) \cdot \mathrm{Id}$.
- $[\Lambda, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*$.

下一小节中我们将会看到这个恒等式与其在全纯向量丛上的推广——Nakano 恒等式，这些恒等式是证明 Kodaira 消灭定理的关键.

1.2 全纯向量丛

设 (E, h) 是 Hermitian 流形 (X, g) 上的全纯向量丛，且带有 Hermitian 度量 h，则回忆我们有：

- $\mathcal{A}^k(E) := \Gamma\left(\bigwedge^k X \otimes E\right)$，即全体 $E-$ 值的 $k-$ 形式，同样有 $\mathcal{A}^{p,q}(E) := \Gamma\left(\bigwedge^{p,q} X \otimes E\right)$，也即全体 $E-$ 值的 (p,q) 形式. 我们有分解 $\mathcal{A}^k(E) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(E)$.
- E 上存在 $\mathbb{C}-$ 线性映射 $\overline{\partial}_E : \mathcal{A}^{p,q}(E) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(E)$，且满足 $\overline{\partial}_E^2 = 0$，以及 Lebniz 法则

$$\overline{\partial}_E(f \cdot \alpha) = \overline{\partial} f \wedge \alpha + f \overline{\partial}_E \alpha.$$

- E 上的 **Dolbeault 上同调**定义为

$$\mathrm{H}^{p,q}(X,E) := \mathrm{H}^q\left(\mathcal{A}^{p,\bullet}(X,E),\overline{\partial}_E\right) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\overline{\partial}_E : \mathcal{A}^{p,q}(E) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(E)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{\partial}_E : \mathcal{A}^{p,q-1}(E) \to \mathcal{A}^{p,q}(E)\right)}.$$

  熟知 [1] Dolbeault 上同调群 $\mathrm{H}^{p,q}(X,E)$ 同构于 $\mathrm{H}^q\left(X,\Omega_X^p\otimes E\right)$.

- 对于 Hermitian 度量 h，其可以诱导 $h : E \to E^*$ 一个 $\mathbb{C}$– 反线性的同构，其中 $s \mapsto h(\cdot, s)$，则我们可以定义 $\bar{*}_E : \bigwedge^{p,q} X\otimes E \to \bigwedge^{n-p,n-q} X\otimes E^*$，其中对 $\varphi\in\mathcal{A}^{p,q}(X)$ 与 $s\in\Gamma(E)$，

$$\bar{*}_E(\varphi\otimes s) := \bar{*}(\varphi)\otimes h(s) := \overline{*\varphi}\otimes h(s) = *(\bar{\varphi})\otimes h(s),$$

  其中最后一个等号用到了 $*$ 是 $\mathbb{C}$– 线性延拓得到的.

  容易看到在 $\bigwedge^{p,q} X\otimes E$ 上有 $\bar{*}_{E^*}\circ\bar{*}_E = (-1)^{p+q}$.

- 在 $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ 上我们可以定义 Hermitian 度量 $(\cdot,\cdot)$，其中

$$(\alpha,\beta) := \int_X \alpha\wedge\bar{*}_E\beta, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathcal{A}^{p,q}(E),$$

  这里 $\wedge$ 对 E 和 E^* 上的分量是 $E\otimes E^*\to\mathbb{C}$ 的配对.

- 类似于 Kähler 流形上的情形，我们也可以定义 $\overline{\partial}_E$ 的对偶算子 $\overline{\partial}_E^* := -\bar{*}_E\circ\overline{\partial}_E\circ\bar{*}_E$，不难证明其恰好是在 Hermitian 度量 $(\cdot,\cdot)$ 下 $\overline{\partial}_E$ 的对偶算子.

- E 上的 **Laplace 算子**定义为 $\Delta_E := \overline{\partial}_E\overline{\partial}_E^* + \overline{\partial}_E^*\overline{\partial}_E$，称

$$\mathcal{H}^{p,q}(E) := \mathrm{Ker}\left(\Delta_E : \mathcal{A}^{p,q}(E)\to\mathcal{A}^{p,q}(E)\right),$$

  为**调和 (p,q)-形式**. 容易看到 $\bar{*}_E : \mathcal{H}^{p,q}(E)\to\mathcal{H}^{n-p,n-q}(E^*)$ 诱导了 $\mathbb{C}$– 反线性同构.

我们有如下重要结果：

定理 1.7 (Hodge 分解)**.** *设 (E,h) 是 Hermitian 流形 (X,g) 上的全纯向量丛，则有*

$$\mathcal{A}^{p,q}(E) = \overline{\partial}_E\mathcal{A}^{p,q-1}(E)\oplus\mathcal{H}^{p,q}(E)\oplus\overline{\partial}_E^*\mathcal{A}^{p,q+1}(E).$$

由此也容易得到 $\mathrm{H}^{p,q}(X,E)\cong\mathcal{H}^{p,q}(E)$，且为有限维线性空间.

定理的完整证明需要椭圆微分算子的技术，囿于篇幅，详细证明可以参考 [2].

利用 Hodge 分解以及 $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)\times\mathcal{H}^{n-p,n-q}(X,E^*)\to\mathbb{C}$ 上的非退化配对：$(\alpha,\beta)\mapsto\int_X\alpha\wedge\beta$，我们有如下的 Serre 对偶定理：

定理 1.8 (Serre 对偶). 设 E 是紧 n 维复流形 X 上的全纯向量丛，则我们有 $\mathbb{C}-$ 线性同构

$$\mathrm{H}^{p,q}(X,E)\cong\left(\mathrm{H}^{n-p,n-q}(X,E^*)\right)^*.$$

特别的，我们有如下两个更常用的对偶

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^q\left(X,\Omega_X^p\otimes E\right)&\cong\left(\mathrm{H}^{n-q}\left(X,\Omega_X^{n-p}\otimes E^*\right)\right)^*\\ \mathrm{H}^q(X,E)&\cong\left(\mathrm{H}^{n-q}\left(X,K_X\otimes E^*\right)\right)^*.\end{aligned}$$

现在我们转入全纯向量丛上的微分几何：

定义 1.9 (联络与曲率). 设 E 是 *Hermitian* 流形 (X,g) 上的全纯向量丛，E 上的**联络**$\mathrm{d}_A:\mathcal{A}^0(E)\to\mathcal{A}^1(E)$ 是一个 $\mathbb{C}-$ 线性映射，且满足如下 *Lebniz* 法则：

$$\mathrm{d}_A(f\cdot s)=\mathrm{d}f\otimes s+f\cdot\mathrm{d}_As$$

对任意 $f\in C^\infty(X)$，以及 $s\in\Gamma(E)$.

容易证明 $F_A:=\mathrm{d}_A\circ\mathrm{d}_A\in\mathcal{A}^2(\mathrm{End}(E))$，称为联络 d_A 的**曲率**.

注意到 $\mathcal{A}^1(E)=\mathcal{A}^{1,0}(E)\oplus\mathcal{A}^{0,1}(E)$，对于联络 d_A 也可以对应分解为 $\partial_A+\overline{\partial}_A$，这里 $\partial_A:\mathcal{A}^0(E)\to\mathcal{A}^{1,0}(E)$，且 $\overline{\partial}_A:\mathcal{A}^0(E)\to\mathcal{A}^{0,1}(E)$. 回忆对于全纯向量丛，我们也有典范的 $\overline{\partial}_E:\mathcal{A}^0(E)\to\mathcal{A}^{0,1}(E)$，这启发我们定义如下特别的联络：

定义 1.10 (Chern 联络). 设 (E,h) 是 *Hermitian* 流形 (X,g) 上的全纯向量丛，我们称 E 上的联络 d_A 是 ***Chern* 联络**，如果其满足：

- $\mathrm{d}\left(h(s,t)\right)=h(\mathrm{d}_As,t)+h(s,\mathrm{d}_At)$，其中 $s,t\in\Gamma(E)$.
- $\overline{\partial}_A=\overline{\partial}_E$，也即 $\mathrm{d}_A=\partial_A+\overline{\partial}_E$.

注 1.11. 容易证明，给定 E 上的 *Hermitian* 度量 h，*Chern* 联络是存在且唯一的.

对于 Chern 联络 d_A，其曲率 $F_A\in\mathcal{A}^{1,1}\left(\mathrm{End}(E,h)\right)$，这可以通过局部上利用 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}+A$，以及 $F_A=\mathrm{d}A+A\wedge A$ 证明，细节可以参考 [1].

特别的，对于全纯线丛 (L,h)，注意到 $\mathrm{End}(L,h)\cong\mathfrak{u}(L)\cong\sqrt{-1}\underline{\mathbb{R}}$，也即 X 上的平凡丛，可知对于其上的 Chern 联络对应的曲率 $F_A\in\sqrt{-1}\mathcal{A}^{1,1}(X)$，也即 $\sqrt{-1}F_A$ 实的 $(1,1)-$ 形式.

因此可以定义：

定义 1.12. 对于全纯线丛 L，称

$$c_1(L):=\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A\right]$$

为 L 的**第一 *Chern* 类**，其中 F_A 为 L 上任一联络 d_A 的曲率.

注 1.13. 利用 *Chern-Weil* 定理可以保证上述定义的良好性，如 F_A 是闭的，以及上同调类不依赖于联络的选取.

特别的，对于 Hermitian 流形 (X, g) 上的全纯线丛 L，选取一个 Hermitian 度量以及其对应的 Chern 联络 d_A，我们有

$$c_1(L) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A\right] \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}).$$

定义 1.14 (除子与线丛)**.** 复流形 X 的余一维解析子簇 Y 称为**超平面** *(*也即局部上总可写成一个全纯函数的零点集*)*，若 Y 不能分解成其他超平面的并，则称 Y 是**不可约的**.

X 上的除子 D 是形式线性组合

$$D = \sum_i a_i \cdot Y_i,$$

其中 $Y_i \subset X$ 为不可约超曲面且 $a_i \in \mathbb{Z}$.

任意一个除子 D，都可以唯一定义 *[1]* 一个 X 上的全纯线丛 $\mathcal{O}_X(D)$.

2 Kodaira 消灭定理

现在我们可以开始陈述并证明本文的主题之一——Kodaira 消灭定理:

定理 2.1 (Kodaira 消灭定理)**.** 设 L 是 n 维紧复流形 X 上的全纯正线丛，则当 $p + q > n$ 时，有

$$\mathrm{H}^{p,q}(X, L) = 0.$$

在证明上述定理之前，我们先介绍关于线丛正性的概念：

2.1 正形式与正线丛

定义 2.2 (正形式)**.** 设 α 是 *Kähler* 流形 (X, ω_g) 上的一个实的 $(1,1)-$ 形式，称其是**正的**，如果对任意非零全纯切向量 $v \in \mathcal{T}X$，均有

$$-\sqrt{-1}\alpha(v, \overline{v}) > 0.$$

例子 2.3. *Kähler* 形式 ω_g 就是一个实的 $(1,1)-$ 正形式，注意到选取局部坐标 (z^i)，则有 $TX \otimes \mathbb{C} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\partial_1, \cdots, \partial_n, \partial_{\bar{1}}, \cdots, \partial_{\bar{n}}\right\}$，其中 $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial z^i}$，$\partial_{\bar{j}} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$. 因此有 $g = g_{i\bar{j}}\mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\bar{z}^j$，这里 $g_{i\bar{j}} = g(\partial_i, \partial_{\bar{j}})$.

从而 $\omega_g = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j$，因此对任意 $0 \neq v = v^i\partial_i \in \Gamma(\mathcal{T}X)$，我们有

$$-\sqrt{-1}\omega_g(v, \overline{v}) = g_{i\bar{j}}v^i\overline{v^j} = g(v, \overline{v}) > 0.$$

定义 2.4 (正线丛)**.** 复流形 X 上的全纯线丛 L 称为**正的**，如过存在实的闭、正 $(1,1)-$ 形式 ω，使得 $c_1(L) = [\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

注 2.5. 事实上，如果 X 上允许一个正线丛 L，那么 (X, ω) 就是一个 *Kähler* 流形.

为了便于使用，下面关于正线丛的几何刻画至关重要：

性质 2.6. 设 ω 为 *Kähler* 流形 X 上实的 $(1,1)-$ 形式，且 $[\omega] = c_1(L) \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$，则存在全纯线丛 L 上的 *Hermitian* 度量 h，使得其 *Chern* 联络对应的曲率 F_A 满足 $\omega = \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A$.

特别的，全纯线丛 L 是正的，当且仅当存在其上 *Hermitian* 度量 h，使得其 *Chern* 联络对应的曲率 F_A 满足 $\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A$ 是正形式，也即对任何 $v \in \Gamma(\mathcal{T}X)$ 有 $F_A(v,\overline{v}) > 0$.

证明：任取 L 上的 Hermitian 度量 h_0，以及其对应的 Chern 曲率 F_{A_0}，则对任何 $\rho \in C^\infty(X)$，$\mathrm{e}^\rho \cdot h_0$ 也是 L 上的一个 Hermitian 度量，设其对应的 Chern 曲率为 F_{A_ρ}.

回忆 [1] 中计算，我们有 $F_{A_0} = \overline{\partial}\partial\log(h_0)$，这里局部上 h_0 可以看成是一个正函数，因此有

$$F_{A_\rho} = \overline{\partial}\partial\log(\mathrm{e}^\rho \cdot h_0) = \overline{\partial}\partial(\rho + \log h_0) = \overline{\partial}\partial\rho + F_{A_0}.$$

反之，任给 $\rho \in C^\infty(X)$，$\overline{\partial}\partial\rho + F_{A_0}$ 均可以被实现成 Chern 曲率，因此现在只需要解如下的 $\overline{\partial}\partial-$ 方程：寻找 ρ 使得

$$\overline{\partial}\partial\rho = -2\pi\sqrt{-1}\omega - F_{A_0},$$

这里 $[\omega] = c_1(L) \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个实的 $(1,1)-$ 形式.

注意到 $\mathrm{d}\left(-2\pi\sqrt{-1}\omega - F_{A_0}\right) = 0$，也即 $d-$ 闭的，从而由 [1] 中 Kähler 流形的 $\overline{\partial}\partial-$ 引理，我们可知 ρ 的存在性，综上我们完成了证明. □

2.2 Kodaira 消灭定理的证明

我们现在可以开始证明 Kodaira 消灭定理，为此我们需要借助一些算子与恒等式：回忆 Kähler 流形 $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ 上的 Lefschetz 算子 L 及其对偶 Λ，其可自然延拓到 $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ 上，也即考虑 $\mathrm{L} = \mathrm{L}\otimes 1$，以及 $\Lambda = \Lambda \otimes 1$.

我们有如下 Kähler 恒等式的推广，

定理 2.7 (Nakano 恒等式)**.** 设 (E,h) 为 *Kähler* 流形 (X,ω_g) 上的全纯向量丛，且有 *Chern* 联络 d_A，则在 $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ 上，有

- $[\Lambda,\mathrm{L}] = (n-p-q)\cdot\mathrm{Id}$.
- $[\Lambda,\overline{\partial}_E] = \sqrt{-1}\,\bar{*}_{E^*}\circ\partial_{A^*}\circ\bar{*}_E =: -\sqrt{-1}\,(\partial_A)^*$，其中 d_{A^*} 是 d_A 在 E^* 上诱导的 *Chern* 联络.

注 2.8. 容易看到当取 $E = \mathcal{O}_X$，即全纯平凡丛时，*Kähler* 恒等式就是 *Nakano* 恒等式的特例，这两者的证明可以在 *[1]*、*[2]* 中找到，由于其证明对理解定理并无本质作用，我们略去细节.

可以证明，$(\partial_A)^* := -\bar{*}_{E^*}\circ\partial_{A^*}\circ\bar{*}_E$ 是 ∂_A 在 $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ 上赋予 *Hermitian* 度量 $(\cdot,\cdot)$ 下的对偶算子.

性质 2.9. 设 (E,h) 是 *Kähler* 流形 (X,ω_g) 上的全纯向量丛，则对任何调和 $(p,q)-$ 形式 α，也即 $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(X,E)$，以及 (E,h) 上 *Chern* 曲率 F_A 有

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,(F_A\wedge\Lambda(\alpha),\alpha) \le 0, \quad \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,(\Lambda(F_A\wedge\alpha),\alpha) \ge 0,$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ 上的 *Hermitian* 度量.

证明：由 d_A 为 Chern 联络，则有 $\mathrm{d}_A = \partial_A + \overline{\partial}_E$，进而 $F_A = \partial_A \circ \overline{\partial}_E + \overline{\partial}_E \circ \partial_A$. 由 α 调和，从而可知 $\partial_E \alpha = 0$ 且 $\overline{\partial}_E \alpha = 0$. 进而

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}\,(F_A \wedge \Lambda(\alpha), \alpha) &= \sqrt{-1}\left(\partial_A \circ \overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha), \alpha\right) + \sqrt{-1}\left(\overline{\partial}_E \circ \partial_A \circ \Lambda(\alpha), \alpha\right) \\
&= \sqrt{-1}\left(\overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha), \partial_A^* \alpha\right) + \sqrt{-1}\left(\partial_A \circ \Lambda(\alpha), \overline{\partial}_E^* \alpha\right) \\
&= \left(\overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha), -\sqrt{-1}\partial_A^* \alpha\right) + 0 \quad (\text{利用}\alpha\text{调和}) \\
&= \left(\overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha), [\Lambda, \overline{\partial}_E]\alpha\right) \quad (\text{利用 Nakano 恒等式}) \\
&= -\left(\overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha), \overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha)\right) \quad (\text{利用}\alpha\text{调和}) \\
&= -||\overline{\partial}_E \circ \Lambda(\alpha)||^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1}\,(\Lambda(F_A \wedge \alpha), \alpha) &= \sqrt{-1}\left(\Lambda \circ \overline{\partial}_E \circ \partial_A(\alpha), \alpha\right) \\
&= \sqrt{-1}\left([\Lambda, \overline{\partial}_E] \circ \partial_A(\alpha), \alpha\right) + \sqrt{-1}\left(\overline{\partial}_E \circ \Lambda \circ \partial_A(\alpha), \alpha\right) \\
&= (\partial_A^* \circ \partial_A(\alpha), \alpha) + \sqrt{-1}\left(\Lambda \circ \partial_A(\alpha), \overline{\partial}_E^* \alpha\right) \\
&= ||\partial_A \alpha||^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

其中再次用到了 Nakano 恒等式与 $\overline{\partial}_E^* \alpha = 0$. □

现在我们可以开始证明 Kodaira 消灭定理：

证明：注意到 L 为正线丛，从而由性质2.6，可知存在其上的 Hermitian 度量使得对应的 Chern 曲率 F_A 满足 $\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A$ 是实的正 $(1,1)-$ 形式，从而视 $\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A$ 为 X 上的 Kähler 形式，也即有 Kähler 流形 $\left(X, \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A\right)$，从而有其对应的 Lefschetz 算子 $\mathrm{L} = \cdot \wedge \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A$.

由性质2.9，任取调和 $(p,q)-$ 形式 α，也即 $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(L)$，我们有

$$\left(\left[\Lambda, \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A\right]\alpha, \alpha\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,(\Lambda(F_A \wedge \alpha), \alpha) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,(F_A \wedge \Lambda(\alpha), \alpha) \geq 0,$$

再由 Nakano 恒等式，我们可知

$$(n-p-q)||\alpha||^2 = ([\Lambda, \mathrm{L}]\alpha, \alpha) = \left(\left[\Lambda, \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_A\right]\alpha, \alpha\right) \geq 0,$$

从而可知当 $p+q > n$ 时，我们有 $\alpha = 0$，也即 $\mathcal{H}^{p,q}(L) = 0$，故由定理1.7可知 $\mathrm{H}^{p,q}(X, L) \cong \mathcal{H}^{p,q}(L) = 0$，即证 Kodaira 消灭定理. □

用类似的办法，可以证明如下的消灭定理，

定理 2.10 (Serre 消灭定理)**.** *设 L 为 n 维紧复流形 X 上的全纯正线丛，则对任意 X 上的全纯向量丛 E，存在常数 $m_0 = m_0(E)$，使得*

$$\mathrm{H}^q(X, E \otimes L^m) = 0$$

对任意 $m \geq m_0$ 且 $q > 0$ 成立.

证明：注意到对 $K_X = \Omega_X^n$，我们有

$$\mathrm{H}^q(X, E \otimes L^m) = \mathrm{H}^q\left(X, \Omega_X^n \otimes \left(K_X^* \otimes E\right) \otimes L^m\right) = \mathrm{H}^{n,q}\left(X, \left(K_X^* \otimes E\right) \otimes L^m\right),$$

从而设 $\widetilde{E} := K_X^* \otimes E$，故只需证明：存在 m_0 使得对任何 $m \geq m_0$，以及 $p + q > n$，有

$$\mathrm{H}^{p,q}\left(X, \widetilde{E} \otimes L^m\right) = 0.$$

任取 $\widetilde{E}$ 与 L 上的 Hermitian 度量，并设其对应的 Chern 联络分别为 $\mathrm{d}_{\widetilde{E}}$ 和 d_L，则 $\widetilde{E} \otimes L^m$ 上有 Chern 联络 $\mathrm{d}_A := \mathrm{d}_{\widetilde{E}} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}_{L^m}$. 由 L 为正线丛，故不妨假设选取的度量使得 $\omega := \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_L$ 为 Kähler 形式，则可知 (X, ω) 为 Kähler 流形，记对应的 Lefschetz 算子记为 L_ω.

注意到

$$F_A = F_{\widetilde{E}} \otimes 1 + m \cdot 1 \otimes \omega,$$

从而任取 $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}\left(X, \widetilde{E} \otimes L^m\right)$，由性质2.9，可知

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left([\Lambda, F_A]\alpha, \alpha\right) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\left[\Lambda, F_{\widetilde{E}}\right]\alpha, \alpha\right) + m \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left([\Lambda, F_L]\alpha, \alpha\right) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\left[\Lambda, F_{\widetilde{E}}\right]\alpha, \alpha\right) + m \cdot \left([\Lambda, \mathrm{L}_\omega]\alpha, \alpha\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left\|\left[\Lambda, F_{\widetilde{E}}\right]\right\| \cdot ||\alpha||^2 + m(n - p - q)||\alpha||^2,
\end{aligned}$$

因此当 $m(n - p - q) + \dfrac{1}{2\pi} \cdot \left\|\left[\Lambda, F_{\widetilde{E}}\right]\right\| < 0$ 时，可知 $\alpha = 0$.

进而可知存在 $m_0 = m_0(E) = \dfrac{\left\|\left[\Lambda, F_{\widetilde{E}}\right]\right\|}{2\pi}$，使得对任何 $m > m_0$，且 $p + q > n$，有

$$\mathrm{H}^{p,q}\left(X, \widetilde{E} \otimes L^m\right) \cong \mathcal{H}^{p,q}\left(X, \widetilde{E} \otimes L^m\right) = 0,$$

特别的，选取 $p = n$，$q > 0$，则可完成证明. □

Kodaira 消灭定理经常用于证明不存在全纯截面，如下例，

例子 2.11. 我们证明对复射影空间 $\mathbb{C}P^n$，其上的全纯线丛 $\mathcal{O}(m)$ 当 $m < 0$ 时，不存在全纯截面：事实上，只需证明 $\mathrm{H}^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(m)) = 0$，由 *Serre* 对偶定理，我们有

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(m)) \cong \mathrm{H}^n\left(\mathbb{C}P^n, \Omega_X^n \otimes \mathcal{O}(-m)\right)^* \cong \mathrm{H}^{n,n}\left(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(-m)\right)^*.$$

回忆 $c_1(\mathcal{O}(1)) = [\omega_{\mathrm{FS}}]$，这里 ω_{FS} 是 $\mathbb{C}P^n$ 的 *Fubini-Study* 度量对应的 *Kähler* 形式，而 *Kähler* 形式总是正的实 $(1,1)-$ 形式，因此可知 $\mathcal{O}(1)$ 为正线丛，从而对任何 $-m > 0$，有 $\mathcal{O}(-m) = \mathcal{O}(1)^{\otimes(-m)}$ 也为正线丛，从而由 *Kodaira* 消灭定理，可知

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(m)) \cong \mathrm{H}^{n,n}\left(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(-m)\right)^* = 0.$$

3 Kodaira 嵌入定理

Kodaira 消灭定理的一个最优雅的应用是如下的 Kodaira 嵌入定理，我们将在本节最后给出其完整的证明.

定理 3.1 (Kodaira 嵌入定理). *设 L 是紧复流形 X 上的全纯正线丛，则 X 是射影流形，即存在 N 使得 X 可以全纯嵌入到 $\mathbb{C}P^N$ 中.*

注 3.2. *事实上，若 X 为射影流形，也即存在全纯嵌入 $i: X \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$，则其上总存在全纯正线丛 $i^*\mathcal{O}(1)$，换言之存在全纯正线丛是 X 射影流形的充要条件.*

上述定理表明紧复流形是否是射影流形的障碍可被如下的拓扑条件所刻画：

推论 3.3. *设 X 为紧复流形，则 X 为射影流形当且仅当存在 $a \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ 使得 a 可以表示为正的实 $(1,1)-$ 形式.*

证明: 只需证明存在 $a \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ 使得 a 可以表示为正的实 $(1,1)-$ 形式等价于存在全纯正线丛，一方面若 L 为全纯正线丛，则可知 $c_1(L) \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$，且存在实的正 $(1,1)-$ 形式 ω 使得 $c_1(L) = [\omega]$，从而可知 $a = c_1(L)$ 即为所求.

另一方面，由假设可知 $a \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z}) := \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{H}^{1,1}(X)$，且 a 是正形式，从而由 Lefschetz 定理 [1]，$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ 为满射，从而可知存在全纯线丛 L 使得 $c_1(L) = a$，故可知 L 是 X 上的全纯正线丛. □

例子 3.4. *设 X 为紧复曲线，也即紧黎曼面，则可知其上的体积形式 $\mathrm{Vol}_X \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ 可被表示为正的实 $(1,1)-$ 形式，从而由推论3.3可知 X 是射影流形，也即所有紧黎曼面都可以嵌入到复射影空间中. 事实上，可以证明 [3]，任何紧黎曼面都可以全纯嵌入到 $\mathbb{C}P^3$ 中.*

为了证明 Kodaira 嵌入定理，我们实际上是借助 L 的截面去构造嵌入映射，为了叙述方便，我们需要首先引入丰沛线丛的概念.

3.1 丰沛线丛

设 L 为紧复流形 X 上的全纯线丛，则由定理1.7可知

$$\mathrm{H}^0(X, L) = \mathrm{H}^0(X, \Omega_X^0 \otimes L) \cong \mathrm{H}^{0,0}(X, L)$$

是有限维线性空间，设有一组线性基 $s_0, \cdots, s_N$，则其零点集的交

$$\mathrm{Bs}(L) := \mathrm{Z}(s_0) \cap \cdots \cap \mathrm{Z}(s_N)$$

是 X 的一个解析子簇，容易看到在 $X \setminus \mathrm{Bs}(L)$ 上，我们可以良好定义如下全纯映射：

$$\varphi_L : X \setminus \mathrm{Bs}(L) \to \mathbb{C}P^N, \quad x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)],$$

并且我们有 [1]，$\varphi_L^*\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^N}(1) \cong L|_{X\setminus \mathrm{Bs}(L)}$.

因此我们可以借助线丛的全纯截面去构造一个到复射影空间的映射，我们自然希望这个全纯映射恰好能实现为嵌入，这启发我们去定义：

定义 3.5 (丰沛线丛)**.** 设 L 为紧复流形 X 上的全纯线丛，称其为**丰沛的**，如果存在 $k > 0$ 使得 $\mathrm{Bs}(L^k) = \varnothing$，且对 $\mathrm{H}^0(X, L^k)$ 的一组线性基 $s_0, \cdots, s_N$，有映射

$$\varphi_{L^k} : X \to \mathbb{C}P^N, \quad x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]$$

是一个全纯嵌入.

利用上述概念，我们可以将 Kodaira 嵌入定理重述为：

定理 3.6 (Kodaira 嵌入定理等价形式)**.** 设 L 为紧 *Kähler* 流形上的全纯线丛，则 L 为正线丛当且仅当 L 为丰沛线丛.

丰沛线丛蕴含正线丛是较为容易的：

证明：设 L 为 X 上的丰沛线丛，则存在 $k > 0$ 使得 φ_{L^k} 为嵌入，且 $L^k \cong \varphi_{L^k}^*\mathcal{O}(1)$，由 $\mathcal{O}(1)$ 是正线丛，不难知道其拉回 L^k 也是正线丛，注意到 $c_1(L^k) = k \cdot c_1(L)$ 可知 L 也是正线丛. □

我们将在3.3节中给出另一部分的证明，设已有 L 为紧复流形 X 上的正线丛，我们想要说明存在 $k > 0$ 使得对 $\mathrm{H}^0(X, L^k)$ 的线性基 $s_0, \cdots, s_N$，有

$$\varphi_{L^k} : X \to \mathbb{C}P^N, \quad x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]$$

是一个全纯嵌入，只需证明如下三点：

1. $\mathrm{Bs}(L^k) = \varnothing$ 从而 φ_{L^k} 能全局定义在 X 上，这等价于任意 $p \in X$，存在 $s \in \mathrm{H}^0(X, L^k)$，使得 $s(p) \neq 0$，这显然等价于限制映射

   $$\mathrm{H}^0(X, L^k) \to L^k|_p, \quad s \mapsto s(p)$$

   是满射.

2. φ_{L^k} 为单射，为保证这点，只需证明对任意 $p \neq q \in X$，存在 $s \in \mathrm{H}^0(X, L^k)$，使得 $s(p) \neq 0$ 而 $s(q) = 0$，这显然等价于限制映射

   $$\mathrm{H}^0(X, L^k) \to L^k|_p \oplus L^k|_q, \quad s \mapsto (s(p), s(q))$$

   是满射.

3. φ_{L^k} 为浸入，也即任意 $p \in X$，切映射 $\varphi_{L^k *,p}$ 为单射，等价于 $\varphi_{L^k}^*|_p : \Omega_{\mathbb{C}P^N}|_{\varphi_{L^k}(p)} \to \Omega_X|_p$ 为满射. 取 $s_0 \in \mathrm{H}^0(X, L^k)$ 使得 $s_0(p) \neq 0$，并扩张成线性基 $s_0, \cdots, s_N$，使得 $s_i(p) = 0$ 对任

意 $i>0$. 从而 φ_{L^k} 在 p 的邻域上可表示成 $y\mapsto(t_1(y),\cdots,t_N(y))\in\mathbb{C}^N$，其中 $t_i=\dfrac{s_i}{s_0}$，并且 $t_i(p)=0$. 进而 $\varphi_{L^k}^*|_p$ 满射等价于 $(\mathrm{d}t_i)_p$ 构成了 $\Omega_X|_p$ 的一组基.

记 $V_L(p):=\{s\in\mathrm{H}^0(X,L):s(p)=0\}$，从而容易证明 [1]，上述等价于外微分映射

$$\mathrm{d}_p:V_{L^k}(p)\to L^k|_p\otimes\Omega_X|_p,\quad s\mapsto(\mathrm{d}s)_p$$

为满射.

显然 1 蕴含于 2 中，因此我们只需证明存在 $k>0$ 使得 2,3 均满足. 为证明 2,3，我们需要在 X 上对 p,q 两点进行爆破，于是我们需要先在下一小节中回忆爆破的基本知识.

3.2 复流形的爆破

我们主要关心在一点处的爆破，首先来看向量空间的情形：

定义 3.7 ($\mathbb{C}^n$ 的爆破)**.** 我们定义$\mathbb{C}^n$ **在点 0 处的爆破**为

$$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n):=\{(\ell,z)\in\mathbb{C}P^{n-1}\times\mathbb{C}^n:z\in\ell\}\subset\mathbb{C}P^{n-1}\times\mathbb{C}^n.$$

容易看到 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$ 即为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^{n-1}}(-1)$，也即 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上的典范线丛.

之所以称其为" 爆破"，是因为我们有如下基本的性质：

性质 3.8. 考虑投影映射 $\mathrm{pr}_2:\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}^n$，也即 $(\ell,z)\mapsto z$，则注意到 $\mathrm{pr}_2^{-1}(0)=\{(\ell,0):\ell\in\mathbb{C}P^{n-1}\}\cong\mathbb{C}P^{n-1}$，且为 $\mathcal{O}(-1)$ 的零截面，从而我们有投影映射

$$\mathrm{pr}_2:\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n)\setminus\mathbb{C}P^{n-1}\to\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$$

为双全纯同构.

现在我们可以对一般的复流形去定义在一点处的爆破了，本质上就是局部上将 p 的邻域替换为其爆破，

定义 3.9 (复流形的爆破)**.** 设 X 为 n 维紧复流形，$p\in X$，我们定义 $\mathrm{Bl}_p(S)$ 为 X **在点 p 处的爆破**如下：

- 选取 p 的邻域 U 与双全纯同构 $\varphi:U\to\mathbb{C}^n$，且 $\varphi(p)=0$，
- 考虑双全纯同构 $\psi:\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\to\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n)$，

则我们现在取

$$X_p:=\mathrm{Bl}_p(X):=(X\setminus U)\cup_{\varphi\circ\psi}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{C}^n),$$

容易看到 $X_p=\mathrm{Bl}_p(X)$ 仍为一个复流形.

注 3.10. 事实上，容易看到我们有 $X_p = X \cup \mathbb{P}\left(T_p^{1,0}X\right)$.

定义 3.11. 我们有全纯映射 $\sigma : X_p \to X$，即把 $\mathbb{P}\left(T_p^{1,0}X\right) \mapsto \{p\}$，其余部分为双全纯的 id，则对 $E_p := \sigma^{-1}(p) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ 是 X_p 中的解析超曲面，称为**例外除子**.

利用转移函数，容易证明 [1]：

性质 3.12. 在 p 点处的爆破 X_p 的典范线丛 K_{X_p} 同构于 $\sigma^* K_X \otimes \mathcal{O}_{X_p}\left((n-1)E_p\right)$.

下面我们集中精力证明如下命题，这是 Kodaira 嵌入定理中能使用消灭定理的关键：

性质 3.13. 设 X 为紧复流形，L 为其上的全纯正线丛，考虑 $\sigma : \widehat{X} \to X$ 是 X 在有限个不同点 $p_1, \cdots, p_\ell \in X$ 处的爆破，且 E_j 是例外除子 $\sigma^{-1}(p_j)$，其中 $j = 1, \cdots, \ell$，则对 X 上任意全纯线丛 S，以及整数 $n_1, \cdots, n_\ell > 0$，有

$$\sigma^*(L^k \otimes S) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}}\left(-\sum_{j=1}^{\ell} n_j \cdot E_j\right)$$

当 k 充分大时为 $\widehat{X}$ 上的正线丛.

证明： 容易看到对 $\sigma : \widehat{X} \to X$，以及 $L \to X$ 上 Hermitian 度量 h 对应的 Chern 曲率 F_L，则有 $\sigma^*\left(-\sqrt{-1}F_L\right)$ 在 $\widehat{X} \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_\ell)$ 上是正定的，而在各个 E_j 的切方向上为 0，因为 σ 限制在 E_j 上为常值映射.

注意到 $\mathcal{O}(-E_j)|_{E_j} \cong \mathcal{O}(1)$，因此可以选取其上的 Hermitian 度量使得对应的 Chern 曲率 F_{E_j} 满足 $-\sqrt{-1}F_{E_j}$ 在 $T^{1,0}E_j$ 上是正定的，因此我们选取单位分解延拓上述 Hermitian 度量得到 h'，考虑 $\sigma^* h \otimes h'$，则可知对 $\sigma^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}}\left(-\sum n_j \cdot E_j\right)$，其上的 Chern 曲率为

$$F_{\sigma^* h \otimes h'} := k \cdot \sigma^* F_L + \sum_{j=1}^{\ell} n_j \cdot F_{E_j}$$

满足 $-\sqrt{-1}F_{\sigma^* h \otimes h'}$ 是处处正定的 $(1,1)-$ 实形式.

现在任取 S 上的 Hermitian 度量使得曲率 F_S 为 $(1,1)-$ 形式，从而有 $\sigma^*(L^k \otimes S) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}}\left(-\sum n_j \cdot E_j\right)$ 上的曲率为 $(1,1)-$ 形式

$$F := k \cdot \sigma^* F_L + \sigma^* F_S + \sum_{j=1}^{\ell} n_j \cdot F_{E_j},$$

从而由 X 紧可知，对 k 充分大总有 F 处处正定，即证. □

一个很简单的推论是：

推论 3.14. 设 X 为紧射影流形，则在一点处的爆破 $\widehat{X}$ 也为射影流形.

证明： 由 X 射影可知其上存在正线丛 L，则对 $\sigma : \widehat{X} \to X$，由性质3.13可知 $\sigma^* L \otimes \mathcal{O}(-E)$ 为 $\widehat{X}$ 上的正线丛，这里 E 是爆破对应的例外除子. 因此由 Kodaira 嵌入定理可知 $\widehat{X}$ 也为射影流形. □

3.3 Kodaira 嵌入定理的证明

我们只需分别证明3.1小节中所转化到的 2,3 点，

- 存在 k 充分大，使得对任意不同两点 $p,q\in X$，有限制映射

$$|_{p,q}:\mathrm{H}^0(X,L^k)\to L^k|_p\oplus L^k|_q,\quad s\mapsto(s(p),s(q))$$

是满射.

证明：设在 p,q 两点处对 X 进行爆破，得到 $\sigma:\widehat{X}:=(X_p)_q\to X$，且有例外除子 $E_p=\sigma^{-1}(p)$ 与 $E_q=\sigma^{-1}(q)$，记除子 $E:=E_p+E_q$.

一方面 $\left(\sigma^*L^k\right)|E_p=\sigma^*\left(L^k|_p\right)$，而 $L^k|_p$ 为平凡丛，故可知 σ^*L^k 限制在 E_p,E_q 上均为平凡丛，进而有

$$\sigma^*:L^k|_p\oplus L^k|_q\xrightarrow{\cong}\mathrm{H}^0\left(E,\sigma^*L^k|_E\right).$$

另一方面，由 $\sigma:\widehat{X}\backslash\left(E_p\cup E_q\right)\to X\backslash\{p,q\}$ 为双全纯同构，故有同构 $\sigma^*:\mathrm{H}^0\left(X\setminus\{p,q\},L^k\right)\to\mathrm{H}^0\left(\widehat{X}\setminus\left(E_p\cup E_q\right),\sigma^*L^k\right)$，而由 Hartogs 延拓定理，可知 $X\setminus\{p,q\}$ 上的全纯截面可以自然延拓到 X 上，因此有 $\mathrm{H}^0\left(X\setminus\{p,q\},L^k\right)\cong\mathrm{H}^0(X,L^k)$. 同时注意到 $\left(\sigma^*L^k\right)|E_p$ 和 $\left(\sigma^*L^k\right)|E_q$ 是平凡丛，因此 $\widehat{X}\setminus\left(E_p\cup E_q\right)$ 上的全纯截面也可以平凡延拓到 $\widehat{X}$ 上，从而 $\mathrm{H}^0\left(\widehat{X}\setminus\left(E_p\cup E_q\right),\sigma^*L^K\right)\cong\mathrm{H}^0\left(\widehat{X},\sigma^*L^k\right)$，综上我们得到了

$$\sigma^*:\mathrm{H}^0\left(X,L^k\right)\xrightarrow{\cong}\mathrm{H}^0\left(\widehat{X},\sigma^*L^k\right).$$

显然我们有如下图表可交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\left(X,L^k\right) \arrow[r, "|_{p,q}"] \arrow[d, "\sigma^*"'] & L^k|_p\oplus L^k|_q \arrow[d, "\sigma*"] \\
\mathrm{H}^0\left(\widehat{X},\sigma^*L^k\right) \arrow[r, "|_E"] & \mathrm{H}^0\left(E,\sigma^*L^k|_E\right)
\end{tikzcd},$$

从而只需证明 $\mathrm{H}^0\left(\widehat{X},\sigma^*L^k\right)\xrightarrow{|_E}\mathrm{H}^0\left(E,\sigma^*L^k|_E\right)$ 为满射即可，这启发我们考虑如下短正合列

$$0\to\sigma^*L^k\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}(-E)\to\sigma^*L^k\xrightarrow{|_E}\sigma^*L^k|_E\to 0,$$

进而有同调群的长正合列

$$\cdots\to\mathrm{H}^0\left(\widehat{X},\sigma^*L^k\right)\xrightarrow{|_E}\mathrm{H}^0\left(E,\sigma^*L^k|_E\right)\to\mathrm{H}^1\left(\widehat{X},\sigma^*L^k\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}(-E)\right)\to\cdots. \tag{3.1}$$

令 $L':=\sigma^*L^k\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}(-E)\otimes K^*_{\widehat{X}}$，从而由性质3.12可知 $K_{\widehat{X}}\cong\sigma^*K_X\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}((n-1)E)$，因此

$$\begin{aligned}
L'&\cong\sigma^*(L^k)\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}(-E)\otimes\sigma^*K_X^*\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}((1-n)E)\\
&\cong\sigma^*\left(L^k\otimes K_X^*\right)\otimes\mathcal{O}_{\widehat{X}}\left(-nE_p-nE_q\right),
\end{aligned}$$

故有性质3.13可知存在 $k_1 > 0$ 使得对任何 $k > k_1$，有 L' 为 $\widehat{X}$ 上的正线丛.

从而

$$\mathrm{H}^1\left(\widehat{X}, \sigma^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}}(-E)\right) \cong \mathrm{H}^1\left(\widehat{X}, K_{\widehat{X}} \otimes L'\right) \cong \mathrm{H}^{n,1}\left(\widehat{X}, L'\right),$$

故由 Kodaira 消灭定理，可知 $\mathrm{H}^1\left(\widehat{X}, \sigma^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widehat{X}}(-E)\right) = 0$，进而由(3.1)可知 $\mathrm{H}^0\left(\widehat{X}, \sigma^* L^k\right) \xrightarrow{|_E} \mathrm{H}^0\left(E, \sigma^* L^k|_E\right)$ 为满射，综上我们完成了这一部分的证明！ □

- 存在 k 充分大，使得对任意 $p \in X$，记 $V_L(p) := \{s \in \mathrm{H}^0(X, L) : s(p) = 0\}$，则有外微分映射

$$\mathrm{d}_p : V_{L^k}(p) \to L^k|_p \otimes \Omega_X|_p, \quad s \mapsto (\mathrm{d}s)_p$$

  为满射.

证明： 设在 p 点处对 X 进行爆破，得到 $\tau : \widetilde{X} := X_p \to X$，且有例外除子 $E_p = \tau^{-1}(p)$. 注意到 $\mathrm{H}^0\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p)\right)$ 可表示在除子 E_p 上为 0 的 $\sigma^* L^k$ 的全纯截面，从而类似的使用 Hatorgs 延拓定理可证明有同构

$$\tau^* : V_{L^k}(p) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^0\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p)\right).$$

回忆 $\Omega_X|_p \cong \left(T^{1,0}X|_p\right)^*$，且由爆破的定义可知 $E_p \cong \mathbb{P}\left(T^{1,0}X|_p\right)$，注意到我们有熟知的同构 $(\mathbb{C}^m)^* \cong \mathrm{H}^0(\mathbb{C}P^{m-1}, \mathcal{O}(1))$，结合 $E_p \cong \mathbb{P}\left(T^{1,0}X|_p\right)$ 上对应的超平面线丛 $\mathcal{O}(1)$ 恰好就是 $\mathcal{O}_{E_p}(-E_p)$. 结合同构 $L^k|_p \cong \mathrm{H}^0\left(E_p, \tau^* L^k|_{E_p}\right)$，我们有同构

$$L^k|_p \otimes \Omega_X|_p \cong \mathrm{H}^0\left(E_p, \tau^* L_k|_{E_p} \otimes \mathcal{O}_{E_p}(-E_p)\right).$$

显然我们也有如下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} V_{L^k}(p) & \xrightarrow{\quad \mathrm{d}_p \quad} & L^k|_p \otimes \Omega_X|_p \\ {\scriptstyle \tau^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \mathrm{H}^0\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p)\right) & \xrightarrow{|_{E_p}} & \mathrm{H}^0\left(E_p, \tau^* L_k|_{E_p} \otimes \mathcal{O}_{E_p}(-E_p)\right) \end{array},$$

从而只需证明 $\mathrm{H}^0\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p)\right) \xrightarrow{|_{E_p}} \mathrm{H}^0\left(E_p, \tau^* L_k|_{E_p} \otimes \mathcal{O}_{E_p}(-E_p)\right)$ 为满射即可.

注意到我们有短正合列

$$0 \to \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2E_p) \to \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p) \to \tau^* L_k|_{E_p} \otimes \mathcal{O}_{E_p}(-E_p) \to 0,$$

进而有同调群的长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathrm{H}^0\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p)\right) &\xrightarrow{|_{E_p}} \mathrm{H}^0\left(E_p, \tau^* L^k|_{E_p} \otimes \mathcal{O}_{E_p}(-E_p)\right) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2E_p)\right) \to \cdots. \end{aligned}$$

令 $L'' := \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2E_p) \otimes K_{\widetilde{X}}^*$，从而由性质3.12可知 $K_{\widetilde{X}} \cong \tau^* K_X \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E_p)$，因此

$$
\begin{aligned}
L'' &\cong \tau^*(L^k) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2E_p) \otimes \tau^* K_X^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}((1-n)E_p) \\
&\cong \tau^* \left(L^k \otimes K_X^*\right) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}\left(-(n+1)E_p\right),
\end{aligned}
$$

故有性质3.13可知存在 $k_2 > 0$ 使得对任何 $k > k_2$，有 L'' 为 $\widehat{X}$ 上的正线丛.

从而

$$
\mathrm{H}^1\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2E_p)\right) \cong \mathrm{H}^1\left(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} \otimes L''\right) \cong \mathrm{H}^{n,1}\left(\widetilde{X}, L''\right),
$$

故由 Kodaira 消灭定理，可知 $\mathrm{H}^1\left(\widehat{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2E_p)\right) = 0$，从而由同调群的长正合列可得出 $\mathrm{H}^0\left(\widetilde{X}, \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E_p)\right) \xrightarrow{|_{E_p}} \mathrm{H}^0\left(E_p, \tau^* L_k|_{E_p} \otimes \mathcal{O}_{E_p}(-E_p)\right)$ 为满射，综上我们也完成了这部分的证明! $\square$

于是现在只需要选取 $k > k_1 + k_2$，即可保证 φ_{L^k} 是全纯单浸入，而 X 是紧的且 $\mathbb{C}P^N$ 是 Hausdorff 的，从而可知其为全纯嵌入，也即证正线丛 L 是丰沛的，

至此，我们完成了 Kodaira 嵌入定理的证明.

参考文献

[1] D. Huybrechts, *Complex geometry: an introduction*. Springer, 2005, vol. 78.

[2] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 2014.

[3] 梅加强, 黎曼曲面导引. 北京大学出版社, 2013.