

Differential Topology

Notes and Exercises

M.m Kay From Chern Class

2023 年 12 月 29 日

前言

本笔记的记录出于笔者大三上学期的微分流形课程复习笔记，以及同时期的丘赛微分拓扑讨论班讲稿，因为前后参考书目的辗转，本笔记中有诸多同义词汇或同一符号的混用，单元读者不会因笔者的混乱行文而迷失。

凯淼淼

2023年12月29日

第一章 光滑流形	1
1.1 定义与例子	1
1.2 映射的光滑逼近	5
1.3 必要练习	6
第二章 向量丛	9
2.1 法丛和管状邻域	10
2.1.1 预备：子流形附近的广义反函数定理	10
2.1.2 管状邻域定理	10
2.1.3 应用：同伦与光滑同伦	10
2.2 必要练习	11
第三章 横截理论	15
3.1 横截性	15
3.2 横截相交稳定性初探——从 1 到 ∞	18
3.3 带边流形	21
3.3.1 定义与性质推广	21
3.3.2 应用：零维、一维流形与不动点	26
3.4 横截性再探——从 0 到 1	30
3.4.1 横截相交的广泛存在性	30
3.4.2 横截相交与同伦	32
3.5 必要练习	34
第四章 相交理论	37
4.1 模 2 相交理论：定义与性质	37
4.2 模 2 相交理论：应用	42
4.2.1 模 2 环绕数	42
4.2.2 Jordan-Brouwer 分离定理	43
4.2.3 Borsuk-Ulam 定理	46
4.3 定向相交理论	50
4.4 必要练习	51

第五章 Morse 理论	53
第六章 配边理论	55
第七章 de Rham 理论	57
第八章 度量几何引论	59

1.1 定义与例子

定义 1.1.1: 光滑流形

我们称一个拓扑空间 (M, \mathcal{T}) 是一个 n 维光滑流形, 如果其满足:

1. 作为拓扑空间是 Hausdorff 的 (也即任意不同两点可用不交开集分离);
2. 作为拓扑空间是第二可数的 (也即有可数拓扑基 \mathcal{T}_0 , 任意 \mathcal{T} 中元素都可以写成可数个 \mathcal{T}_0 中元素的并);
3. 作为拓扑空间满足局部欧氏 (也即任意 $p \in M$, 存在三元组 (φ, U, V) 使得 U 是 p 在 M 中的一个开邻域, V 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 且 $\varphi: U \rightarrow V$ 为同胚。此时称三元组 (φ, U, V) 为 p 点附近的一个坐标卡, U 为一个坐标邻域, φ 为坐标映射);
4. 相交的坐标卡是相容的 (也即对 M 上的两个坐标卡 $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ 和 $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$, 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则有二者之间的转移映射 $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是微分同胚)。

注: 一般具体验证一个拓扑空间是否是光滑流形, 就需要严格遵守以上步骤逐条验证。更一般的, 从一个集合出发, 我们往往需要遵循以下的验证步骤:

- **第一步:** 写出 M 作为集合的显式;
- **第二步:** 赋予 M 一个合理的拓扑, 严格声明其上的开集;
- **第三步:** 验证在第二步中赋予的拓扑满足 T_2 和 C_2 ;
- **第四步:** 找出 M 的一组坐标卡, 以及证明这是到欧氏空间中开集的同胚;
- **第五步:** 计算转移函数, 以及定义域 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, 并验证转移映射光滑。

Problem 1. 证明: 可以在实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 可以被赋予光滑结构实现成光滑流形。

证明 我们严格遵守以上步骤进行证明:

第一步: 我们有

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \mathbb{Z}_2 = \{[x] | x \in \mathbb{S}^n, x \sim -x\}.$$

第二步: 我们为 $\mathbb{R}P^n$ 赋予商拓扑, 也即设 $V \subseteq \mathbb{R}P^n$, 则其为开集, 当且仅当对映射 $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $x \mapsto [x]$, 有 $\pi^{-1}(V)$ 为 \mathbb{S}^n 中的开集。

第三步: 任取 $[x] \neq [y]$, 从而有 $x \neq y$, 由 \mathbb{S}^n 是 Hausdorff 的, 存在两点的互不相交开邻域 U, V , 且更进一步, 我们可以适当缩小 U, V 使得 $U, V, -U, -V$ 这四个开集两两不交, 从而由商拓扑, 有 $U' = \pi(U) = \pi(-U)$ 为 $[x]$ 的开邻域, 同样有 V' , 显然 U' 和 V' 不相交, 从而表明 $\mathbb{R}P^n$ 在上述商拓扑下为 Hausdorff 空间。

由 \mathbb{S}^n 为第二可数的拓扑空间 (赋予欧氏空间的子空间拓扑), 且 $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$, 进而可知对任意开集 U , $\pi(U)$ 也为开集, 从而 π 为开映射, 故不难得到 $\mathbb{R}P^n$ 也为第二可数的。

第四步: 我们选取坐标邻域

$$U_i = \{[x^1, \dots, x^{n+1}] | x \in \mathbb{S}^n, x^i \neq 0\},$$

以及坐标映射

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x^1, \dots, x^{n+1}] \mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right),$$

以及 $V_i = \varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ 。则一方面 $\cup U_i = \mathbb{R}P^n$, 另一方面, 不难验证 φ_i 为双射, 且逆映射为

$$\varphi_i^{-1}(y^1, \dots, y^n) = [y^1, \dots, 1, \dots, y^n],$$

从而不难验证这两个映射均为连续映射且互逆。(这里要严格说清楚这两映射连续, 则还需要借助 π 回到球面上去讨论, 但这里处理的都是分母不为 0 的有理函数, 从而连续是不言自明的)

第五步: 我们计算转移映射, 显然任意 $i < j$,

$$U_i \cap U_j = \{[x^1, \dots, x^{n+1}] | x \in \mathbb{S}^n, x^i x^j \neq 0\},$$

从而我们有

- 第五-1 步: 考虑 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, 则简单计算可知为 \mathbb{R}^n 中那些第 $j-1$ 个坐标不为 0 的, $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 为 \mathbb{R}^n 中那些第 i 个坐标不为 0 的;
- 第五-2 步, 具体写出转移映射的表达式: 我们有

$$\varphi_{ji}: (y^1, \dots, y^n) \mapsto [y^1, \dots, 1, \dots, y^n] \mapsto \left(\frac{y^1}{y^{j-1}}, \dots, \frac{1}{y^{j-1}}, \dots, \widehat{\frac{y^{j-1}}{y^{j-1}}}, \dots, \frac{y^n}{y^{j-1}} \right),$$

从而很明显这是一个微分同胚。

综上, 我们证明了可以在 $\mathbb{R}P^n$ 上赋予一个光滑流形结构。



定义 1.1.2: 光滑映射与微分同胚

设 $f: M \rightarrow N$ 为两个光滑流形之间的连续映射，若任给 $p \in M$ 和 $q = f(p) \in N$ ，存在两者的局部坐标卡 (φ, U, V) 和 (ψ, U', V') ，映射

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow \psi(U')$$

作为欧氏空间中开集的映射是光滑的，则称 f 为光滑映射。

注：这里连续性的要求是必不可少的，因为我们需要 $f^{-1}(V)$ 也为 M 上的开集，且这仅仅要求上述 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 光滑是做不到的，一个反例是：考虑 \mathbb{R} 上的两个图册 $\mathcal{A} = \{(\text{id}, \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ ， $\mathcal{B} = \{(\psi_i, U_i, V_i) : i \in \mathbb{Z}\}$ ，其中 $U_i = V_i = (i-1, i+1)$ 且 $\psi_i(x) = x$ 。现在考察

$$f: (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

显然 f 本身并不连续，但是任意 i ，我们考虑 $\psi_i \circ f \circ \varphi: \varphi(\mathbb{R} \cap f^{-1}(U_i)) \rightarrow \psi(U_i)$ ，也即 $\psi_i \circ f$ ，从 $f^{-1}(U_i)$ 映到 $\psi(U_i)$ ，而由于 U_i 不会同时包含 0 和 2，从而映射总是常值的，也即光滑。

例 1.1.1 (流形的连通和). 我们可以定义两个带边流形沿着边界相粘和，设 M, N 均为带边流形 (其定义在后文)，且其边界通过 h 微分同胚，则我们可以赋予 $M \sqcup_h N$ 光滑流形结构，具体细节需要用到带边流形的袖口定理，也即任意带边流形 M 的边界 ∂M 存在一个开邻域微分同胚于 $\partial M \times [0, 1)$ 。从而对无边流形 M, N ，分别在两点处剪去一个充分小邻域，使得边界微分同胚于 S^{n-1} ，则沿着边界粘和，则可以得到两个流形的连通和。

利用 Mayer-Vietoris 序列不难证明 $\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N)$ ，这可以说明 $\mathbb{R}P^{2n}$ 不能实现成某个流形的边界，具体细节可以参看本章必要练习。

定义 1.1.3: 映射的秩

设 $f: M \rightarrow N$ 为两个微分流形之间的 $C^k (k \geq 1)$ 映射， $p \in M$ ， $q = f(p) \in N$ ，分别取 p 处的局部坐标系 (U, φ) 和 q 处的局部坐标系 (V, ψ) ，令

$$\text{rank}_p f := \text{rank} (J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}(\varphi(p))),$$

称为 f 在 p 处的秩，利用转移映射均为微分同胚，不难证明该定义不依赖于局部坐标的选取。

利用欧氏空间中的反函数定理，只要在一点处 Jacobi 矩阵可逆，则可在该点处寻觅到一个开集使得该映射在这个开集上给出了一个微分同胚，因此我们可以顺水推舟将此结果推广到相同维数流形上的反函数定理。

对于局部常秩的映射，也即存在该点处的一个邻域，使得映射在这个邻域上秩为常数，则这个映射可以在局部坐标下有很好的标准型：

定理 1.1.1: 秩定理

设 $f : M^m \rightarrow N^n$ 是一个在 p 处附近秩恒为 r 的常秩映射，那么存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) 和 $f(p)$ 附近的坐标卡 (V, ψ) 使得

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

1.2 映射的光滑逼近

定义 1.2.1: 单位分解

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为微分流形 M 的开覆盖, 如果存在至多可数个光滑函数 $\{\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 满足以下条件

1. $0 \leq \rho_i(x) \leq 1$, 对 $\forall x \in M, i \in \mathbb{N}$;
2. 对每一个 g_i , 均存在 $\alpha(i) \in \Gamma$, 使得 $\text{supp} \rho_i \subseteq U_{\alpha(i)}$;
3. $\{\text{supp} \rho_i\}$ 为局部有限的子集族;
4. $\rho_i(x) = 1$, 对任意 $x \in M$,

则称 $\{\rho_i\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 的单位分解。

定理 1.2.1

对于微分流形 M 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, 均存在从属于这个开覆盖的单位分解。

1.3 必要练习

Problem 1. 证明：全体秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵作为 \mathbb{R}^{mn} 的子流形维数为 $r(m+n-r)$ 。

证明 由正则子流形结构定理，我们只需要：对任意秩为 r 的矩阵 A ，找到其一个开邻域 U ，以及定义在 U 上的函数 g ，使得 0 为 g 的正则值，且 $g^{-1}(0) = U \cap M_{m \times n}^r$ 。这里我们用 $M_{m \times n}^r$ 表示全体秩为 r 的矩阵构成的集合。

熟知：存在 A 的 r 阶子式非零，我们先不妨假设

$$A = \begin{pmatrix} B_{r \times r} & C_{r \times (n-r)} \\ D_{(m-r) \times r} & E_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

且 B 为 r 阶可逆矩阵。进而可知：存在 \mathbb{R}^{mn} 中 A 的一个开邻域 U 使得其 r 阶顺序主子式均不为 0 。又结合矩阵秩在微扰下不减，从而存在在邻域 V ，使得任意 $X \in V$ ， $\text{rank} X \geq \text{rank} A$ 。

回忆线性代数：我们不难用分块初等变换将 A 变为

$$\begin{pmatrix} B_{r \times r} & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & (E - DB^{-1}C)_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

这样的操作在邻域 $U \cap V$ 中总是合法的，因为前面已经论述过在 U 中 r 阶顺序主子式均非零。因此可知： $\text{rank} A = r$ 当且仅当 $E - DB^{-1}C = O_{(m-r) \times (n-r)}$ ，现考虑定义在 $U \cap V$ 上的映射 g ：

$$g: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}^{(m-r)(n-r)}, \quad g(A) = E - DB^{-1}C = E - \frac{1}{\det B} DB^*C,$$

这里 B^* 表示矩阵 B 的伴随，从而可知在 $U \cap V$ 上， $g^{-1}(0) = (U \cap V) \cap M_{m \times n}^r$ ，且 g 每个分量均可看做分母不为 0 的有理函数（分子分母均为多项式），进而可知 $O_{(m-r) \times (n-r)}$ 为正则值。

从而对任意的 A 做类似的讨论，我们由这些局部上的结果结合正则子流形结构定理，可知 $M_{m \times n}^r$ 为 \mathbb{R}^{mn} 中余维数为 $(m-r)(n-r)$ 的正则子流形，也即维数为 $r(m+n-r)$ 。♣

Problem 2. 任意 \mathbb{R}^n 中闭的连通超曲面 S ，无论是否紧，总能实现成一个光滑函数的正则零点集，也即存在 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $S = F^{-1}(0)$ ，且 0 为 F 的正则值。

证明 一个优雅证明可参见 [MSE 回答](#)。♣

Problem 3. 证明： $\mathbb{R}P^{2n}$ 不能实现成某个流形的边界。

证明 反证法，假设其可被实现成某个 $2n+1$ 维流形 M 的边界，从而考虑 DM ，为两个 M 沿着 ∂M 相粘，注意到此时有 $\chi(DM) = 2\chi(M) - \chi(\mathbb{R}P^{2n}) = 2\chi(M) - 1$ ，而由 Poincaré 对偶可知，奇数维流形的欧拉示性数为偶数，从而矛盾。♣

注：事实上，利用 Stiefel-Whitney 示性类，我们有一个流形可以实现成另外一个流形的边界（更一般的两个流形配边），当且仅当这个流形的 Stiefel-Whitney 示性数为 0，更详细的可参考 Milnor 的示性类教材。

Problem 4. 证明：不存在 $S^1 \times S^1$ 到 S^1 的连续映射 f 使得， $f(p, p) = p$ ，且 $f(p, q) = f(q, p)$ 。

证明 我们考虑 f 诱导的基本群同态 $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ，则有 $g(0, 0) = 0$ ， $g(1, 1) = 1$ ，从而结合 $g(0, 1) = g(1, 0)$ 可知 $2g(0, 1) = g(1, 1) = 1$ ，矛盾！不存在这样的群同态，更不存在这样的连续映射。 ♣

Problem 5. 设 $f : M \rightarrow M$ 为光滑映射，且满足 $f \circ f = f$ ，证明：如果 f 连通，则 $f(M)$ 为 M 的正则子流形。

证明 注意到 $f_{*,p}^2 = f_{*,p}$ ，从而由幂等矩阵的性质可知 $\text{rank}(f_{*,p}) + \text{rank}(I_n - f_{*,p}) = n$ ，从而不难结合扰动下矩阵秩变大说明 f 为常秩映射，进而结合正则子流形结构定理即可证明。 ♣

Problem 6.

1. 证明：任何紧流形上的光滑函数都至少有两个临界点；
2. 证明：对亏格为 g ， $g \geq 1$ 的闭曲面，其上的光滑函数至少有三个临界点；
3. 证明：对任意亏格为 g ， $g \geq 1$ 的闭曲面，存在其上的光滑函数恰有三个临界点。

Problem 7. 设 M 为 n 维光滑带边流形，且可光滑嵌入 \mathbb{S}^{n+1} ，证明： $\partial M \times \mathbb{S}^2$ 可光滑嵌入 \mathbb{S}^{n+2} 。

2.1 法丛和管状邻域

2.1.1 预备：子流形附近的广义反函数定理

2.1.2 管状邻域定理

2.1.3 应用：同伦与光滑同伦

同伦意义下处理问题可以完全转化为光滑同伦 (这样就可以用 Sard 定理):

例 2.1.1 (球面的低阶同伦群). 对任意 $k < n$, $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$.

证明 任取连续映射 $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$, 存在光滑映射 g 与 f 同伦, 而由 Sard 定理, g 的像不满, 从而结合球极投影以及 \mathbb{R}^n 可缩, 可知 g 零伦, 从而可知 f 零伦, 进而 $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$. ♣

2.2 必要练习

Problem 1. 设 m 维光滑流形 M 可以嵌入 \mathbb{R}^{m+1} , 且有平凡法丛, 证明: 对任意可以嵌入 \mathbb{R}^K 中的 n 维流形 N , $M \times N$ 可以嵌入到 \mathbb{R}^{K+m} 中。

证明 由题设可知 $M \times \mathbb{R}$ 可以嵌入到 \mathbb{R}^{m+1} , 从而任意 K , $M \times \mathbb{R}^K$ 可以嵌入到 \mathbb{R}^{K+m} 中, 从而命题显然。取 $M = \mathbb{S}^m$, 则可知 $\mathbb{S}^{m_1} \times \mathbb{S}^{m_2} \times \cdots \times \mathbb{S}^{m_k}$ 可以嵌入到 $\mathbb{R}^{m_1+\cdots+m_k+1}$ 中。♣

Problem 2. (球面与向量场)

1. 证明: 对球面 \mathbb{S}^n , 若 n 为偶数, 则对径映射同伦于反射 $r(x^1, \dots, x^{n+1}) = (-x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$; 若 n 为奇数, 则同伦于恒同映射;
2. 证明: 球面 \mathbb{S}^n 上存在一个非退化向量场当且仅当 n 为奇数。

证明 (1) 对于对径映射 A , 反射映射 r 与恒同映射 I , 我们均可写成如下矩阵形式:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

因此对 n 为偶数, 我们可以构造如下同伦映射

$$H(\cdot, t) = \text{diag} \left\{ -1, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \right\}, \quad t \in [0, \pi].$$

从而对奇数维球面, 我们可以将上述 H 去掉 -1 给出构造。

(2) 当 n 为奇数时, 考虑切向量场 $(-x^2, x^1, \dots, -x^{2n+1}, x^{2n+1})$ 即可; 另一方面, 若有全局非零切向量场 X , 从而不妨假设其模长均为 1, 进而对任意 $p \in \mathbb{S}^n$, 考虑映射 $H: \mathbb{S}^n \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^n$, $H(p, t) = p \cos t + X_p \sin t$, 进而这给出了恒同映射与对径映射的同伦, 从而由 (1) 与映射度可知 n 不能为偶数。♣

Problem 3. 构造光滑向量场分别满足以下条件:

1. \mathbb{S}^{2n+1} 上的光滑向量场, 使它处处非零;
2. \mathbb{T}^n 上的光滑向量场, 使它处处非零;

3. S^2 上的光滑向量场, 使它恰有一个零点;
4. S^2 上的光滑向量场, 使它恰有两个零点;
5. 证明: S^3 可以平行化;
6. 实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上的光滑向量场, 使它恰有一个零点。

解 (1) 在任一点 (x^1, \dots, x^{2n+2}) 处考虑向量 $(-x^2, x^1, -x^4, x^3, \dots, -x^{2n+2}, x^{2n+1})$, 则显然正交, 从而在这点处的切空间中, 由模长恒为 1 可知处处非零, 光滑性显然。

(2) 置 $T\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ 于 \mathbb{R}^{2n} 中, 则对点 $(x^1, x^2, \dots, x^{2n+1}, x^{2n})$, 且 $(x^{2k-1})^2 + (x^{2k})^2 = 1$ 。则由 $TT^n = TS^1 \times \dots \times TS^1$, 从而我们考虑这点处的线性无关切向量

$$(-x^2, x^1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, -x^{2n}, x^{2n-1}),$$

从而我们构造了 \mathbb{T}^n 上 n 个处处线性无关的向量场, 从而 \mathbb{T}^n 可平行化。

(3)

(4)

(5)(法一) 因为可以利用四元数乘法给 S^3 赋予 Lie 群结构, 从而其可平行化。

(法二) 在 (x^0, x^1, x^2, x^3) 处考虑三个向量

$$(-x^1, x^0, -x^3, x^2), \quad (-x^2, x^3, x^0, -x^1), \quad (-x^3, -x^2, x^1, x^0),$$

显然均在这点处的切空间中。注意到上述三个向量两两正交, 且均不为 0, 从而线性无关。

事实上切向量的构造, 仍是采用四元数乘法的观点获得的, 记 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^0 + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$, 则三个切向量分别为 $\mathbf{i}x$, $\mathbf{j}x$ 和 $\mathbf{k}x$ 。

(6)



注: 关于向量场的相关问题, 可以进一步参阅[综述](#)。

Problem 4. 设 G 为 Lie 群, 证明: $S^n \times G$ 可平行化。

证明 关键就在于 $TS^n \times \mathbb{R}$ 微分同胚于 $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, 一个方向可以用 $F(p, v) = (p, v + \langle v, p \rangle p)$, 另一个方向可用 $G(p, \xi) = (p, \xi - \langle \xi, p \rangle p)$, 不难验证这给出了一个微分同胚。♣

Problem 5. 证明: $S^n \times S^m$ 可平行化当且仅当 n 或 m 中有一者为奇数。

证明 一方面, 若不妨 n 为奇数, 则由第三题第一问之构造, 我们有 $V \in \mathfrak{X}(S^n)$ 全局不为 0, 从而我们考虑 S^n 上的 $n-1$ 维向量丛 $E := \cup_p E_p$, 其中 $E_p \subseteq T_p S^n$, 且 $v \in E_p$ 当且仅当 $v \perp V_p$, 不

难验证这是一个 $n-1$ 维向量丛, 且 $T\mathbb{S}^n$ 微分同胚于 $E \times \mathbb{R}$ 。故有 $T(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \cong T\mathbb{S}^n \times T\mathbb{S}^m \cong E \times \mathbb{R} \times T\mathbb{S}^m \cong M \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^{m+1} \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}^{n+m}$, 故可知其可平行化。

另一方面, 若 n, m 均为偶数, 则可知 $\chi(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) = \chi(\mathbb{S}^m) \times \chi(\mathbb{S}^n) = 4$, 从而若其上存在处处非零的切向量场, 则可知由 Hopf 指标定理, 其欧拉示性数一定为 0, 矛盾! ♣

注: 由上述可知, 如果紧连通可定向流形上存在处处非零的切向量场, 则欧拉示性数一定为 0, 由此可知 Lie 群的欧拉示性数均为 0, 事实上, 这个命题的另一方向也成立:

Problem 6. 设 M 为 n 维光滑可定向的 n 维紧流形, 则其上存在一个处处非零的切向量场当且仅当其欧拉示性数为 0。

证明 一方面的证明已经蕴含于前一问题中, 我们下证若其欧拉示性数为 0, 则一定存在一个处处非零的切向量场。这事实上可在[这篇回答](#)中找到答案。 ♣

Problem 7. 设 N 为 $2n+1$ 维可平行化的流形, M 为一闭可定向的 $2n$ 维流形, 且 $\chi(M) = 0$, 若存在 M 到 N 的浸入, 证明: M 也可平行化。

证明 证明需要用到示性类理论, 可参考[MSE 回答](#)。 ♣

Problem 8. 对 M 上的向量丛 E , 若 $\text{rank} E > \dim M$, 证明: E 上存在一个处处非零截面。

Problem 9. 证明: 对流形上的任意向量丛, 都可以赋予一个黎曼度量。

证明 选取一组向量丛的局部平凡化 $\{\varphi_\alpha, U_\alpha | \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n\}$, 设 π_α 为从局部平凡的 $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ 到 \mathbb{R}^n 的投影, 因此任意 $u, v \in F_p, p \in U_\alpha$, 即在同一纤维时, 我们可以定义其上的黎曼度量为 $g_\alpha(u, v) := \langle \pi_\alpha \circ \varphi_\alpha(u), \pi_\alpha \circ \varphi_\alpha(v) \rangle$ 。我们再选取 M 上从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 ρ_α , 则我们可以定义

$$g := \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} g_{\alpha},$$

特别的, 对于任意 u, v 不落在同一纤维中, 我们定义 $g(u, v) = 0$, 由此不难完成构造。 ♣

3.1 横截性

在研究子流形的过程中，一个自然会关心的问题：

子流形相交得到的是否还是子流形？

与此同时，我们也会关心另外一个问题：

子流形的原像是否还是子流形？

在正式回答之前，我们先指出，第一个问题事实上蕴含于第二个中，一个不含糊的写法是这样的：设 X, Y 是流形 M 的子流形，则对包含映射 $i: X \hookrightarrow M$ ，我们事实上有

$$X \cap Y = i^{-1}(Y),$$

因此我们只需要研究第二个问题即可。

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射， $Y \subseteq N$ 为 N 的正则子流形，我们想先探索得到一些必要条件，以判别 $f^{-1}(Y)$ 何时成为 M 的子流形。事实上，任取 $p \in f^{-1}(Y)$ ，记 $q = f(p) \in Y$ ， $f^{-1}(Y)$ 为流形意味着存在 p 在 M 中的开集 U 使得 $f^{-1}(Y) \cap U$ 为流形。

注意到在 $q \in Y$ 的邻域，由正则子流形结构定理，存在这样的 V 以及函数 g_1, \dots, g_l (这里 $l = \dim N - \dim Y = \text{codim}_N Y$)，使得 $Y \cap V = g^{-1}(\mathbf{0})$ ，其中 $g = (g_1, \dots, g_l): V \rightarrow \mathbb{R}^l$ ，事实上这里不含糊的讲可以取成 V 处标准的坐标。

因此我们选取 $U = f^{-1}(V)$ ，则

$$f^{-1}(V) \cap U = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \cap V) = \boxed{(g \circ f)^{-1}(\mathbf{0})}.$$

进而结合正则值定理，我们希望： $\mathbf{0}$ 是 $g \circ f: f^{-1}(Y) \cap U \rightarrow \mathbb{R}^l$ 的正则值。简单翻译一下，我们希望

$$(g \circ f)_{*,p} = g_{*,q} \circ f_{*,p}: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^l$$

为满射。现在简单收集回忆一下我们所拥有的信息：

- $g_{*,q}: T_q N \rightarrow \mathbb{R}^l$ 为满射 (因为 $\mathbf{0}$ 是 g 的正则值)；
- $\ker g_{*,q} = T_q Y$ (因为一方面由 g 在 Y 上取常值，进而 $T_q Y \subseteq \ker g_{*,q}$ ，另一方面不难看出两者维数相等)。

进而为了保证 $g_{*,q} \circ f_{*,p}$ 为满射，一个十分粗糙的直觉是

$$\boxed{\text{Im}f_{*,p} \text{ 必须完全盖住 } T_q Y \text{ 在 } T_q N \text{ 中的补空间.}}$$

事实上，这便诱导出了微分拓扑中一个最广泛也最重要的概念：

定义 3.1.1: 横截相交：映射与子流形

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射， $Y \subseteq N$ 为正则子流形，如果任意 $p \in f^{-1}(Y)$ ，均成立

$$\boxed{\text{Im}f_{*,p} + T_{f(p)}Y = T_{f(p)}N,} \quad (3.1)$$

则称 f 与 Y **横截相交**，记为 $f \pitchfork Y$ 。

注：有两种极端情况，在此情形下，横截相交自动成立：

- 若 $f^{-1}(Y)$ 为空集，回忆我们也称 $f^{-1}(q)$ 为空集的 q 为正则值；
- 若 $f: M \rightarrow N$ 为淹没，从而永远有 $\text{Im}f_{*,p} = T_{f(p)}N$ 。

在如上定义和前述讨论之后，我们自然可以总结出如下横截原像定理：

定理 3.1.1: 横截原像定理

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射， $Y \subseteq N$ 为正则子流形，若 $f \pitchfork Y$ ，则 $f^{-1}(Y)$ 为 M 中的正则子流形，并且我们有

1. $\text{codim}_M f^{-1}(Y) = \text{codim}_N Y$ ；
2. $T_p f^{-1}(Y) = f_{*,p}^{-1} T_{f(p)} Y$ 。

注：上述定理的证明无非是前言论述的倒叙，我们这里仅陈述一些辅助理解的直观：在子流形几何中，我们习惯用余维数去说话，这是因为子流形局部上是“若干函数的零点集”，换言之，是用“余维数”多个的函数 g_1, \dots, g_l 去截断大流形得到的。而横截相交则是保证 $f^{-1}(Y)$ 是由 $g_1 \circ f, \dots, g_l \circ f$ 截断得到的，既然被切的刀数相同，那么余维数相同也不难理解了。

将上述定理应用于我们最“能看清”的情形中，也即子流形间横截相交中，我们事实上有

定理 3.1.2: 横截相交：子流形之间

设 X, Y 为光滑流形 M 的正则子流形，若它们横截相交，换言之任意 $p \in X \cap Y$ ，我们有

$$T_p X + T_p Y = T_p M,$$

则有 $X \cap Y$ 为 M 中的正则子流形，并且我们有

1. $\text{codim}(X \cap Y) = \text{codim} X + \text{codim} Y$ ；

$$2. T_p(X \cap Y) = T_pX \cap T_pY.$$

注：一个不含糊的理解 $\text{codim}(X \cap Y) = \text{codim}X + \text{codim}Y$ 的方式还是从零点集的角度出发： X 和 Y 横截相交保证了，在交点处，确定 X 的方程组和确定 Y 的方程组是“无关的”，从而合在一起可以定义余维数更高的子流形。

在本节最后，我们给出一点直观上的误区：尽管绝大多数情形，“不横截相交”几何图像上对应着“相切”，但是并非所有标准的相交都是横截相交，这往往与背景流形有关：一个澄清上述观点的例子是，在 \mathbb{R}^2 中两条曲线横截相交符合直观，但在 \mathbb{R}^3 中曲线横截相交当且仅当其交集为空！因为如果相交，在交点处两个一维的切空间无论如何也无法组成一个三维的切空间。

另外一种理解上述例子的方式则依赖于我们下一节涉及到的“横截相交的稳定性”，在 \mathbb{R}^3 中容易看到，随便扰动一下两条相交曲线，便有可能使它们分离，从而绝不横截相交。

* * * * *

为完整性和趣味性起见，我们在本节末尾再援引两例：

例 3.1.1 (子流形并不完全由正则值原像给出). 在上述讨论中，我们已经看到利用横截性的映射原像，可以得到很多子流形的例子，事实上如球面流形性可由 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的映射 $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 = 1$ 确定，正交矩阵 Lie 群 $O(n)$ 可由 $g: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ 的映射 $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ 给出。

一个自然 (但可能略显荒唐) 的想法是：是否每一个子流形都能实现成某个映射的原像，或者某个正则值的原像呢？很明显答案是不然，一个简单的例子是，考虑 Möbius 带 M 的中轴圆 S ，可以证明，不存在 M 上的光滑函数 h 使得 0 是 h 的正则值，且 $h^{-1}(0) = S$ 。

证明 一个有趣的证明想法是：倘若上述函数存在，我们即可得到一个 $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 的光滑函数，使得

$$h\left(x, \frac{1}{2}\right) \equiv 0, \quad \text{源自于腰圆上恒为 } 0,$$

这即可得到，对任意 $x \in [0, 1]$ ， $h'_x(x, 1/2) \equiv 0$ 。事实上我们还有

$$h(0, y) = h(1, 1 - y), \quad \text{源自于 Möbius 带对边反向粘贴},$$

关于此式同时对 y 求导，即可得到 $h'_y(0, y) = -h'_y(1, 1 - y)$ 。令 $y = 1/2$ ，则可知 $h'_y(0, 1/2) = -h'_y(1, 1/2)$ ，进而结合介值性一定存在 x_0 使得 $h'_y(x_0, 1/2) = 0$ 。故在 $(x_0, 1/2) \in S$ 处， $h'_x = h'_y = 0$ ，这与 0 为正则值矛盾。 ♣

例 3.1.2 (子流形相交出的东西可能很坏). 设 S 为 \mathbb{R}^n 的超曲面，则对任意 $A \subseteq S$ 为其上的闭子集，存在超曲面 S' 使得 $S' \cap S = A$ 。因此倘若没有横截相交的限制，子流形的交会千奇百怪。

证明 科大 2023 第五期征解题。 ♣

3.2 横截相交稳定性初探——从 1 到 ∞

在本节中,我们先讨论最直观的“扰动”——同伦形变。更精准的,我们关心一些“稳定的”性质,换言之我们称一个“性质 P ”是稳定的,如果对任意 $f_0 : M \rightarrow N$ 为满足性质 P 的光滑映射,则对 f_0 的任意光滑同伦 $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得只要 $|t| < \varepsilon$, 则 f_t 仍具有性质 P 。

例 3.2.1 (一些稳定与不稳定的例子).

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的光滑映射“过原点”的性质是不稳定的;
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的光滑映射“与 x 轴横截相交”是稳定的;

定理 3.2.1: 同伦扰动稳定性定理

设 M 为紧流形, N 为光滑流形, $f : M \rightarrow N$ 为光滑映射, 则下面所罗列的 f 的性质是稳定的:

1. 局部微分同胚;
2. 浸入、淹没;
3. 横截相交于一取定的 N 中正则子流形 Y ;
4. 嵌入;
5. 微分同胚。

证明 由逆映射定理可知, 局部微分同胚等价于浸入 + 淹没, 因此我们若证明后两者稳定, 则显然可知前者稳定。

现设 $f_0 : M \rightarrow N$ 为浸入, 我们现在的目标是: 寻找 $\varepsilon > 0$, 使得 $f_{t,*} p$ 对任意 $(p, t) \in M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 均为单射。我们先证明局部上的结果: 任取 $p_0 \in M$, 现有 $f_{0,*} p_0$ 为单射, 若记 $\dim M = m$, $\dim N = n$, 取 p_0 的局部坐标卡 (U, φ) 与 $f(p)$ 的局部坐标 (V, ψ) , 从而可知 $n \times m$ 阶 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial(\psi \circ f_0 \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p_0)) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

有 $m \times m$ 阶非零主子式 (因为秩为 m), 不妨设为前 m 行 m 列。现考虑 $U \times \mathbb{R}$ 上的光滑函数

$$g(p, t) := \det \left(\frac{\partial(\psi \circ f_t \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m},$$

从而由 $g(p_0, 0) \neq 0$, 进而存在开邻域 $U_{p_0} \times (-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0})$ 使得 g 在此开邻域内恒不为 0。进而由 M 紧不难完成剩下的证明, 我们留给执着的读者去自行补齐细节。

不难见到淹没是显然同理的。回忆横截相交也可以局部上划归为一个映射为淹没, 因此用同样的道理亦可证明。



注：上述定理前三个性质均可划归为局部性质，因此处理起来相对容易且类似，为了分隔起见，我们另起一段证明后两者。

证明 回忆光滑版本的嵌入等价于：拓扑嵌入 + 光滑浸入，注意到浸入稳定性已证，同伦映射连续性自动满足，且结合紧空间到 Hausdorff 空间连续双射为同胚，我们只需证明：单射在此条件下是稳定的。

现设 f_0 为单射，考虑光滑映射 $G : M \times I \rightarrow N \times I$, $G(p, t) = (f_t(p), t)$ 。若单射不稳定，换言之则有序列 $t_i \rightarrow 0$ 以及不同的点 $p_i, p'_i \in M$ 使得 $G(p_i, t_i) = G(p'_i, t_i)$ 。

由 M 紧，不妨设 $\{p_i\}$ 与 $\{p'_i\}$ 均收敛，且分别收敛于 $p, p' \in M$ 。进而从 G 的连续性，易有

$$f_0(p) = G(p, 0) = \lim_{i \rightarrow \infty} G(p_i, t_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} G(p'_i, t_i) = G(p', 0) = f_0(p').$$

故由 f_0 为单射，可知 $p = p'$ 。现考虑 G 在 $(p, 0)$ 处的微分信息 (是否浸入/淹没?)，不难得到其 Jacobi 矩阵可表示为

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & & & \vdots \\ f_{0*,p} & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由 f_0 为浸入，从而可知该 Jacobi 矩阵秩为 $m+1$ ，也即 G 为浸入，回忆浸入局部上一定是嵌入 (回忆浸入的局部标准型)，从而可知 G 在 $(p, 0)$ 的某个邻域内是单射，这与序列 p_i, p'_i 的存在性相矛盾！从而可知嵌入是稳定的，换言之嵌入的微小扰动仍然是嵌入。

现设 f_0 为微分同胚，则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\{f_t\}_{|t|<\varepsilon}$ 均为局部微分同胚和嵌入，注意到局部微分同胚意味着 f_t 均为开映射，从而在 N 连通的假设下，不难有 f_t 均为同胚，从而即可证明，细节仍留给执着且细心的读者。 ♣

事实上对于横截相交，我们可以证明一个更“强”的扰动稳定性，即这里扰动参数不必仅取值于 \mathbb{R} ，而可以选取于任意一个拓扑空间，当然为了论述方便，我们将参数集对应的拓扑空间选取为光滑流形，也即有：

定理 3.2.2: 横截相交的稳定性

设 M, T, N, Y 为光滑流形，其中 M 紧致， Y 为 N 的闭正则子流形， T 为参数空间。设 $F : M \times T \rightarrow N$ 为光滑映射，取 $t \in T$ ，定义 $f_t(\cdot) := F(\cdot, t) : M \rightarrow N$ ，则集合

$$\Omega = \{t \in T \mid f_t \text{ 与 } N \text{ 横截相交}\}$$

为开集。

证明 设 $t_0 \in \Omega$ ，将上述命题翻译成更易把握的语句是：对于 t_0 附近的 t ， f_t 也和 Y 横截相交。用反证法，若不然，则存在 $t_i \in T$ 使得 $t_i \rightarrow t_0$ ，但 f_{t_i} 和 Y 均不是横截相交的。

此时存在 $p_i \in M$ 使得 $f(p_i, t_i) = q_i \in Y$, 且有

$$f_{t_i, p_i}^* T_{p_i} M + T_{q_i} N \neq T_{q_i} N, \quad i \geq 1.$$

因为 M 紧致, 从而不妨假设 $\{p_i\}$ 收敛于 p_0 , 由 Y 为闭正则子流形, 从而 $q_0 = f(p_0, t_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(p_i, t_i) \in Y$. 由 Y 为正则子流形, 从而存在 q_0 的开邻域 V 以及其上到 $\mathbb{R}^{\text{codim} Y}$ 的函数 g , 使得 0 为 g 的正则值, 且 $Y \cap V = g^{-1}(0)$.

进而由 f_{t_0} 与 Y 横截相交, 从而 0 为 $g \circ f_{t_0} = g \circ f(\cdot, t_0)$ 的正则值, 也即对应的 Jacobi 矩阵满秩. 回忆: 在微小扰动下矩阵的秩不会变小 (秩变小意味着出现了更多的线性相关, 这是不稳定的), 因此对 i 充分大, 有 0 也为 $g \circ f(\cdot, t_i)$ 的正则值, 矛盾, 进而可知命题正确. ♣

这个定理的证明与上述特殊情形大同小异, 并不值得为它投入太多关注. 事实上, 在我们引入带边流形之后, 会结合 Sard 定理给出一个更重要的“稳定性”:

横截相交是广泛存在的。

事实上, 哲学的讲, 也正是横截相交的广泛存在性, 才蕴含了世界如此丰富多样的可能性. 用动力系统的观点来看, 如果一个不动点处“出发的”的稳定流形与不稳定流形在另外一点处横截相交, 那么我们称这个点为横截同宿点. Poincaré 发现, 横截同宿点的存在导致了动力形态极大的复杂性, 因为横截同宿点的迭代仍是横截同宿点, 从而不稳定流形和稳定流形分别在正向迭代和负向迭代过程中被拉回逼近它们自己, 这导致了一副相互穿插的复杂图景.

Poincaré 也曾据此锐评:

“横截同宿点的图形太复杂, 我甚至不去试图画它. 没有什么比它更好地解释了三体问题的复杂本质, 以及一般说来动力系统所有问题的复杂本质。”

3.3 带边流形

3.3.1 定义与性质推广

容易看到, 对于单位区间 $[0, 1]$, 圆柱面 $S^1 \times [0, 1]$, 他们的边界处并不会微分同胚于一个标准的欧氏空间, 因此原有的流形定义是有一定局限性的, 我们也需要关心一些“带边流形”。事实上, 在微分拓扑中, h -配边理论就需要带边流形的相关概念, 粗糙来说, 配边理论就是关心什么时候两个流形可以实现成一个更大流形的边界 (此时你脑海中的图景应该是一个管道), 那么可以通过研究大流形来获得两个流形之间的关联。这里的“ h ”意味着同伦意义下的, 一个相当重要的应用是证明 5 维以上的 Poincaré 猜想。

和传统流形一样, 我们需要局部上寻找一个标准的模型, 这里我们选取上半空间 $\mathbb{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq 0\}$ 。从而我们可以给出如下定义

定义 3.3.1: 带边流形

我们称 M 为光滑带边流形, 如果 M 为第二可数的 Hausdorff 空间, 且任意 $p \in M$, 存在开邻域 U 与同胚映射 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$, 且有转移映射光滑。

我们定义 M 的边界为 ∂M , 其中 $p \in \partial M$ 如果存在 p 的一个局部坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ 。定义 M 的内部为 $M^\circ = M - \partial M$ 。

注: 此时一个亟待澄清的概念是: 上述定义与拓扑中定义的边界是否吻合/冲突?

- 当 m 维流形 M 作为 \mathbb{R}^m 的子流形时, 拓扑边界和流形边界并没有什么区分 (一个时常会用到情形是对 \mathbb{R}^m 中开区域上讨论积分与 Stokes 定理);
- 当 m 维流形 M 作为 \mathbb{R}^N 的子流形, 这里 $N > m$ 时, 流形边界比拓扑边界更“符合我们的直观”。比如 S^n 作为 \mathbb{R}^{n+1} 中是无边的 (直观上), 但是拓扑上回忆 “ $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ ”, 而在此情形下, S^n 的边界是它自己, 这对我们的讨论毫无裨益。

因此自然的, 如非特殊说明, 我们总假定按流形的边界去理解边界。

对这样一个新的范畴 (带边流形范畴), 我们自然要考虑一些其在一些基本的运算的保持性, 首先是带边光滑流形的乘积是否仍然还是带边光滑流形? 这确实成立, 但其证明略显复杂冗长, 也并不常用。因此我们如下略弱的性质:

命题 3.3.1: 带边流形的乘积

设 M 为带边流形, N 为无边流形, 则 $M \times N$ 是 $\dim M + \dim N$ 维带边流形, 且满足

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N.$$

证明 核心观察是一句话: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^m = \mathbb{H}^{m+n}$, 余下便是无趣的验证定义。 ♣

一个十分自然但重要的性质是:

命题 3.3.2: 带边流形的边界也是流形

设 M 为一 m 维的带边流形, 则 M° 为 m 维无边流形, ∂M 为 $m-1$ 维无边流形。

证明 结合定义不难证明 M° 一定为开集, 从而回忆任何 m 维流形的开集为其开子流形, 进一步仍由定义可知其自然为 m 维无边流形。更要紧的是处理 ∂M 。

仔细想来, 边界点的定义十分方便: 存在一个坐标邻域, 其在坐标映射下的像恰在 $\partial\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}$ 中。进而为了证明 ∂M 是流形, 回忆正则子流形结构定理, 无非是对任意 $p \in \partial M$, 寻找一个 M 中 p 的一个开邻域 U 和坐标映射 (x^1, \dots, x^m) 使得

$$\partial U := U \cap \partial M = \{q \in U | x^m(q) = 0\}.$$

但上述 U 和 (x^1, \dots, x^m) 是针对 p 选取的, 因此我们并不能确定 ∂U 中其他的点在这组坐标下的像仍然在 \mathbb{R}^{m-1} 上!! 简言之, 我们现在还需要证明:

边界点在不同坐标选取下仍为边界点。

翻译成更易把握的数学语言, 即是设 $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$, 且 $\varphi(U) = V$ 则 $\partial V = V \cap \mathbb{R}^{m-1} = \varphi(\partial U)$ 。由定义 (存在坐标映射即可) 可知: $\varphi^{-1}(\partial V) \subseteq U \cap \partial M = \partial U$, 也即 $\partial V \subseteq \varphi(\partial U)$ 。

现任取 $q \in \partial U$, 则由定义, 存在 ψ 使得 $q' = \psi(q) \in \partial W = W \cap \mathbb{R}^{m-1}$, 这里 $W = \psi(U) \subseteq \mathbb{H}^m$ 。若 $q \notin \varphi^{-1}(\partial V)$, 也即有 $g = \varphi \circ \psi^{-1} : W \rightarrow V$, 则可知 $g(q') = \varphi(q) \notin \partial V$ 。换言之, g 将 W 上的一个边界点送到了 V 的一个内点。结合 g 是同胚, 从而有 $W \setminus q'$ 仍与 $V \setminus g(q')$ 同胚。事实上前者可缩, 后者同伦等价于 \mathbb{S}^{m-1} (如果实现将 U 选的充分好), 矛盾。因此 $\partial U \subseteq \varphi^{-1}(\partial V)$ 。

综上所述我们有 $\partial V = \varphi(\partial U)$, 这即证明了 ∂U 是一个 $m-1$ 维的无边流形。 ♣

注: 上述证明采用了一点代数拓扑的技术, 这并不是本质的, 也可以用 g 是微分同胚和反函数定理去从微分角度寻找矛盾。但无论怎么讲, 细节追究起来终究是繁杂且恼人的, 接受这个定理却是容易、自然且心安理得的。

在我们进一步讨论带边流形的性质之前, 我们先横插一个饶有趣味但也十分重要的结论:

命题 3.3.3: 一类构造带边流形的办法

设 S 为光滑无边流形, $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 0 为正则值, 则子集

$$\pi^{-1}([0, +\infty)) := \{p \in S | \pi(p) \geq 0\}$$

为带边流形, 且边界恰为 $\pi^{-1}(0)$ 。

证明 事实上注意到 $\pi^{-1}([0, +\infty)) = \pi^{-1}((0, +\infty)) \sqcup \pi^{-1}(0)$, 而 $\pi^{-1}((0, +\infty))$ 为 M 的开子集, 从而每一点均存在坐标邻域同胚于 \mathbb{H}^s , 这里 $s = \dim S$ 。而在 $\pi^{-1}(0)$ 处, 由 0 为正则值, 从而其为

$s-1$ 维正则子流形, 因此任取 $p \in \pi^{-1}(0)$, 有 (U, x^1, \dots, x^s) 使得 $U \cap \pi^{-1}(0) = \{q \in U | x^s(q) = 0\}$ 。我们断言, 若存在 $q \in U$ 使得 $\pi(q) > 0$ 且 $x^s(q) > 0$, 则任意 $r \in U$ 且 $\pi(r) > 0$, 则 $x^s(r) > 0$ (目的是为了说明可以找到一个邻域使得 $\pi^{-1}((0, +\infty))$ 的坐标完全落在上半平面或下半平面内)。

若不然, 则设有 $\pi(r) > 0$ 且 $x^s(r) < 0$ (不可能为 0), 考虑一条完全在 $\pi^{-1}((0, +\infty))$ 中连接 q 和 r 的道路 σ , 则存在 t 使得 $x^s(\sigma(t)) = 0$, 这意味着 $\sigma(t) \in \pi^{-1}(0)$, 也即 $\pi(\sigma(t)) = 0$, 这与其大于 0 矛盾! 从而可知我们对这个邻域 U , 则 $U \cap \pi^{-1}([0, +\infty))$ 同胚于 \mathbb{H}^s , 综上可知其为一带边流形且流形边界恰为 $\pi^{-1}(0)$ 。♣

注: 仍然是一个直观显然的结论, 证明难点主要是叙述在边界处我能选择一个坐标邻域, 使得连带上 $\pi^{-1}(0, +\infty)$ 的一部分全部落在某半平面中, 这样才能直接和定义联系起来。

例 3.3.1. 对 $\pi(x) = 1 - |x|^2$, 其中 $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 则 $\pi^{-1}([0, +\infty))$ 为单位球, 上一性质表明这为带边流形, 且流形边界恰为标准的 $n-1$ 维球面 \mathbb{S}^{n-1} 。

注: 我们将会在后面看到, 上一性质对应结构所确定的流形将会在 Morse 理论中大放异彩, 我们若记 $M_a := \{p \in M | f(p) \leq a\}$, 这里 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数 (Morse 函数), 则未来我们将证明若对 f 在 (a, b) 中没有临界值, 则 M_a 和 M_b 同伦等价。而每越过一个临界值, M_b 会相对于 M_a 粘附上一个胞腔 (同伦等价意义上)。

现在让我们来推广一些已在无边流形中讨论过的定义与性质:

流形边界的切空间

这并没有什么新东西, 由于 ∂M 是 M 中余 1 维的子流形, 从而可知其在任一点 $p \in \partial M$ 处的切空间 $T_p \partial M$ 为 $T_p M$ 的余 1 维线性子空间。

为了简化记号, 我们对流形 M 上的映射 f 约定: ∂f 表示 f 在 ∂M 处的限制映射。不难发现, ∂f 在 p 点处的切映射 $\partial f_{*,p}$ 恰好为 $f_{*,p}$ 在 $T_p M$ 上的限制映射。(为获得一个更直观的感受, 一个简要的图形即可很好的辅助理解。)

现在, 我们来切空间的角度来看一个“奇怪”的问题:

例 3.3.2. 我们将从切空间的角度说明: $[0, 1]^2$ 不是 \mathbb{R}^2 中的光滑带边子流形 (但它本身确实是光滑带边流形!)。直观想来, 问题肯定是出在“拐角”处, 援举 $(0, 0)$ 这点为例: 倘若其为光滑带边流形, 从而存在 $(0, 0)$ 处的一个开邻域 U 以及坐标映射 φ , 根据代数拓扑里的熟知结果 (其实和命题 3.3.2 中所用一样), φ 一定会把 $[0, 1]^2$ 的边界送至 \mathbb{H}^2 的边界。

注意到 $f_{*,(0,0)}$ 是一个从 $T_{(0,0)} \mathbb{R}^2$ 到 $T_{f(0,0)} \mathbb{R}^2$ 的同构, 且在 $T_{(0,0)} \mathbb{R}^2$ 中, 由直线 $(0, t)$ 与 $(t, 0)$ 所确定的切向量线性无关 (直观来看甚至垂直), 但其像均在 $\partial \mathbb{H}^2$ 上, 因此在 $f_{*,(0,0)}$ 作用下线性相关 (直观来看在同一直线上), 这与 $f_{*,(0,0)}$ 为同构矛盾!

事实上, 容易看到虽然 $[0, 1]^2$ 作为 \mathbb{R}^2 子集在 $(0, 0)$ 处不存在微分同胚于 \mathbb{H}^2 的邻域, 但是显然存在微分同胚于 $\mathbb{R}_{++}^2 := \{x^1 \geq 0, x^2 \geq 0\}$ 的邻域, 我们也可以借此为标准模型, 得到带边流形的进一步推广: 带角 (corner) 流形, 留给感兴趣的读者进一步探索学习。

带边流形的横截相交

现在假设 M 为带边流形，我们现在想考虑光滑映射 $f: M \rightarrow N$ ，且 Y 为 N 的正则子流形，一个自然关心问题是，若此时 f 与 Y 横截相交， $f^{-1}(Y)$ 是否仍然是流形？如果是，是否有边界，边界与 ∂M 的关系如何？比如我们自然希望的一个关系是

$$\partial(f^{-1}(Y)) = f^{-1}(Y) \cap \partial M.$$

但我们不难举出如下的例子：

例 3.3.3. 令 $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得 $f(x^1, x^2) = x^2$ ，从而易见 f 为淹没，进而 f 与 0 横截相交，且 $f^{-1}(0) = \partial\mathbb{H}^2$ ，但针对流形 $f^{-1}(0)$ 本身，其为无边流形，因为就是 \mathbb{R} 。从而上面的等式在这种情形下并不正确。

因此事实上，注意到 $f^{-1}(Y) \cap \partial M = (\partial f)^{-1}(Y)$ ，而若 $f^{-1}(Y)$ 为带边流形，则 $\partial f^{-1}(Y)$ 也为流形。故结合本章一开始关于子流形原像是否为流形的讨论，我们可知需要添上 ∂f 与 Y 横截相交的条件或许才够：

定理 3.3.1: 横截原像定理：带边流形版本

设 f 为从带边流形 M 到无边流形 N 的光滑映射，且 Y 为 N 中的无边正则子流形。现若 $f: M \rightarrow N$ 与 $\partial f: \partial M \rightarrow N$ 均与 Y 横截相交，则有 $f^{-1}(Y)$ 为 M 中的带边子流形，且有 $\partial(f^{-1}(Y)) = f^{-1}(Y) \cap \partial M$ ， $\text{codim}_M f^{-1}(Y) = \text{codim}_N Y$ 。

注：这事实上是横截原像定理的直接推广。

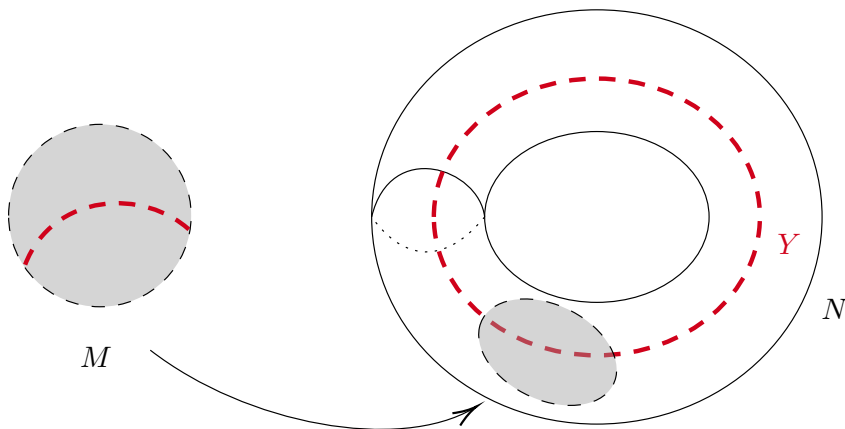


图 3.1: 横截原像定理示意图

证明 直接由条件给出的横截相交，可知 $f^{-1}(Y) \cap M^\circ$ 与 $(\partial f)^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) \cap \partial M$ 均为 M 中正则子流形，并且维数相差 1。但两者是否能组成一个带边流形并不能直接看出。

因此我们从定义出发：验证 $f^{-1}(Y)$ 为带边流形只需要在每一点处寻找到合适的坐标邻域和映射。而由上述，对 $f^{-1}(Y)$ 内点我们已经处理完毕，余下的功夫从而当留在处理边界点处。现任取 $p \in f^{-1}(Y) \cap \partial M$ ，从而存在坐标邻域 (U, φ) 使得 $V := \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^m$ ，这里 $m = \dim M$ ， U 与 V 同胚，记 $q = \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^m$ 。

标准手段：由 Y 为 N 的正则子流形，从而在 $f(p) \in Y$ 处，存在 N 中开邻域 W 与函数 $g: W \rightarrow \mathbb{R}^l (l = \text{codim} Y)$ ，使得 0 为 g 的正则值，且 $Y \cap W = g^{-1}(0)$ 。因此现在考虑映射

$$F := g \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

注意到：为证 $f^{-1}(Y)$ 在 p 点处局部为带边流形，结合 φ 为同胚，只需证明 $\varphi \circ f^{-1}(Y) = \varphi \circ f^{-1} \circ g^{-1}(0) = F^{-1}(0)$ 在 $q \in \partial V$ 处为带边流形。

回忆 f 与 Y 横截相交：这意味着 0 为 $g \circ f$ 的正则值，由 φ 为同胚，从而 0 为 F 的正则值。这也意味着对光滑映射 $F: \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ，在 q 处切映射满秩。我们可以适当延拓 F 的定义得到 $F': V' \rightarrow \mathbb{R}^l$ ，这里 V' 为包含 V 的 \mathbb{R}^m 中开集（简言之我们将定义域从上半平面略微扩展了一点，这不难构造鼓包函数得到），进而可知在 q 处 0 也为 F' 的正则值（关注 \mathbb{H}^m 和 \mathbb{R}^m 切空间是同构的即可）。故 $S = F'^{-1}(0)$ 是 V' 中的一个无边子流形。

现在注意到 $F^{-1}(0) = S \cap \mathbb{H}^m$ ，问题转化为证明 $S \cap \mathbb{H}^k$ 为带边流形（上面一大段只是为了延拓成 \mathbb{R}^m 从而得到一个大范围的无边流形结构）。现在我们将看到 ∂f 横截相交的重要性了。（不妨头脑中浮现出一个上半平面中 x^2 和 x 轴相切的图景）

转化一下语言：我们设 π 为向最后一个坐标分量投影的映射，从而

$$S \cap \mathbb{H}^m = \{s \in S \mid \pi(s) \geq 0\},$$

我们手上已经有的是： S 为无边光滑流形。回忆命题 2.3.3，现在一切的工作转化为：证明 0 为 π 的正则值。

倘若不然，则设存在 $s \in S$ 使得 $\pi(s) = 0$ ， $\pi_{*,s} = 0$ ，这意味着 $s \in S \cap \partial \mathbb{H}^m$ ，且 $T_s S \subseteq T_s(\partial \mathbb{H}^m) = \mathbb{R}^{m-1}$ （因为 π 为线性映射， $\pi_{*,s} = \pi$ ，从而这意味着 $T_s S$ 每个切向量最后一个坐标分量为 0 ）。但由于 $S = F'^{-1}(0)$ ，从而 $F_{*,s} = F'_{*,s}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ 的核恰为 $T_s(S)$ 。又 $\partial F_{*,s}$ 是 $F_{*,s}$ 是限制在 \mathbb{R}^{m-1} 上，从而若 $\ker F_{*,s} = T_s S \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ ，则线性映射 $F_{*,s}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ 和 $\partial F_{*,s}$ 会有相同的核。但有横截相交，可知两者均为满射，从而可知 $\ker F_{*,s}$ 的维数为 $m-l$ ， $\ker \partial F_{*,s}$ 的维数为 $m-l-1$ ，这与两者核相同矛盾！

综上我们历经千辛万苦，证明了带边流形版本的横截原像定理。 ♣

注：仍然的，接受上述定理没有任何心理上的障碍，但想严格叙述清楚却十足费力气。

Sard 定理

定理 3.3.2: 带边流形版本的 Sard 定理

设 f 为从带边流形 M 到无边流形 N 的光滑映射, 那么几乎所有的 N 中点均为 $f: M \rightarrow N$ 和 $\partial f: \partial M \rightarrow N$ 的正则值。

证明 一个朴素但重要的观察是: 若 $p \in \partial M$ 为 ∂f 的正则“点”, 则可知 $\partial f_{*,p}$ 是从 $T_p \partial M$ 到 $T_{f(p)} N$ 的满射, 进而结合 ∂f 即为 f 的限制映射, 从而 x 也是 f 的正则点。

因此现在反过来, 若 $q \in N$ 不是 f 或 ∂f 的正则值, 则

- q 是 f 的临界值, 则其要么是 $f: M^\circ \rightarrow N$ 的临界值, 要么是 $f: \partial M \rightarrow N$ 的临界值。后者推出 q 是 $\partial f: \partial M \rightarrow N$ 的临界值 (利用上一行的论述);
- q 是 $\partial f: \partial M \rightarrow N$ 的临界值。

简言之, q 是 $f: M^\circ \rightarrow N$ 或 $\partial f: \partial M \rightarrow N$ 的临界值, 而由无边流形版本的 Sard 定理, 可知这两者均为 N 的零测集, 进而可知其合起来仍为 N 的零测集, 即证。♣

3.3.2 应用: 零维、一维流形与不动点

零维流形

一个基本的观察是: 任何零维流形都是若干“离散”的点, 更数学的讲, 这组点构成的离散空间 (赋予离散拓扑) 没有聚点, 否则将与局部欧氏条件矛盾。(因为局部上同胚于 \mathbb{R}^0 即单点空间)

特别的, 在紧流形上, 其零维子流形将一定会是有限个点, 下面是一个快速应用:

命题 3.3.4: 紧流形上 Lefschetz 映射不动点个数有限

设 $f: M \rightarrow M$ 为光滑映射。若在 f 的每一个不动点 $p \in M$ 处, f 的切映射 $f_{*,p}: T_p M \rightarrow T_p M$ 没有非零不动点, 则称 f 为 **Lefschetz 映射**。若 M 为紧流形, 则 Lefschetz 映射的不动点最多只有有限个。

证明 我们考虑紧流形 $M \times M$ 的两个正则子流形: 对角子流形 $\Delta := \{(p, p) : p \in M\}$ 和 f 的图像 $\Gamma(f) := \{(p, f(p)) : p \in M\}$ 。不难证明 Δ 和 $\Gamma(f)$ 均微分同胚于 M , 且

$$\#(\Delta \cap \Gamma(f)) = f \text{ 的不动点个数}.$$

因此为证明 f 的不动点个数有限, 一个自然的想法是证明 Δ 与 $\Gamma(f)$ 的交点个数有限, 而“若 $\Delta \pitchfork \Gamma(f)$ ”, 则结合 $\text{codim} \Delta + \text{codim} \Gamma(f) = \dim(M \times M)$, 从而相交一定为零维子流形, 故由上一段的叙述: 可知交点个数一定有限。

目标: 证明 $\Delta \cap \Gamma(f)$ 。任取 $p = f(p)$ (若不存在则自动证完), 从而只需证:

$$T_{(p,p)}\Delta + T_{(p,f(p))}\Gamma(f) = T_{(p,p)}(M \times M).$$

注意到: 任取 $(X_1, X_2) \in T_{(p,p)}(M \times M) = T_p M \times T_p M$, 故现在需要找 $Y, Z \in T_p M$ 使

$$(Y, Y) + (Z, f_{*,p}Z) = (X_1, X_2) \Leftrightarrow \begin{cases} Y + Z = X_1 \\ Y + f_{*,p}Z = X_2 \end{cases},$$

由 $f_{*,p}$ 没有非零不动点, 从而 $f_{*,p} - \text{Id}$ 可逆, 进而存在 $Z \in T_p M$ 使得 $(f_{*,p} - \text{Id})Z = X_2 - X_1$, 进而选取 $Y = X_1 - Z$ 即可。

综上所述, 我们可知命题成立, 证明圆满结束。♣

注: 本题便可看到一个看似平凡的小结论, 却会有着化腐朽为神奇的作用, 在下一节中, 我们将会看到一个类似的结论。

一维流形

不加证明的, 我们陈述并从此往后承认如下一维紧流形分类定理:

定理 3.3.3: 一维紧流形分类定理

任何紧、连通、一维流形 (带边或不带边) 微分同胚于 $[0, 1]$ 或 \mathbb{S}^1 。

注: 这个定理的证明直观是: 从流形上任何一点出发, 以常速率运动, 因为流形紧且一维, 因此势必会走到“头”, 也即抵达边界点或者重新回到原点 (周期运动), 分类讨论去证明即可, 细节均可看做很好的分析练习, 依然留给执着的读者。

由上述定理, 我们可以得知: 由于每个紧一维流形都是若干个连通分支的不交并, 因此势必会微分同胚于若干个 $[0, 1]$ 与若干个 \mathbb{S}^1 的不交并, 这告诉我们:

推论 3.3.1: 一个看似平凡却威力惊人的推论

一维紧流形的边界一定是由偶数个点组成。

现在, 让我们来看看这个如此平凡显然推论, 所具有的巨大功效:

定理 3.3.4: 不存在紧流形到其边界的收缩

设 M 为紧致带边流形, 则不存在光滑映射 $r: M \rightarrow \partial M$, 使得 $\partial r: \partial M \rightarrow \partial M$ 为恒同映射。借用代数拓扑的语言, 即不存在 M 到其边界的收缩。

证明 反证法, 假设存在这样的 r , 则由“Sard 定理”, 存在 $p \in \partial M$ 为映射 r 的正则值, 进而由“带边流形版本的横截原像定理”, 可知 $r^{-1}(p)$ 为 M 的带边子流形, 且 $\partial r^{-1}(p) = r^{-1}(p) \cap \partial M =$

$(\partial r)^{-1}(q) = \{q\}$, 其中最后一个等号源自于 $\partial r = \text{Id}$. 而注意到 $\text{codim} r^{-1}(q) = \dim M - 1$, 从而 $r^{-1}(q)$ 为一维紧子流形, 从而 $\partial r^{-1}(q)$ 应有偶数个点, 矛盾! ♣

注: 在代数拓扑中, 我们只能对闭单位球 \mathbb{B}^n 证明不存在连续收缩映射 (自然不存在光滑收缩映射), 但这需要借助如下同调群的映射

$$\mathbb{Z} = H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbb{B}^n) \xrightarrow{r_*} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z},$$

以及 $r_* \circ i_* = \text{Id}$, $H_{n-1}(\mathbb{B}^n) = 0$ 导出矛盾. 事实上, 代数拓扑范畴和微分拓扑范畴有很多“一样的”命题, 只不过往往前者叙述是“连续”映射, 后者是“光滑”映射.

但在下一节中, 我们将看到 任何一个连续映射都可以同伦于一个光滑映射, 因此研究“同伦范畴”下的问题, 考虑微分拓扑和代数拓扑是“等价的”. 因此在实际问题中, 将代数(微分)拓扑转化为微分(代数)拓扑问题去处理, 往往会有神奇的功效, 我们将有充分多的机会在下一节以及后续章节中慢慢体会.

同代数拓扑中处理的一样, 不存在收缩映射的一个快速应用是如下的 Brouwer 不动点定理:

定理 3.3.5: 光滑版本的 Brouwer 不动点定理

任何光滑映射 $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ 均有不动点。

证明 反证法, 若存在 f 没有不动点, 则我们可以构造映射 $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, 其中 $r(x)$ 为从 $f(x)$ 出发经过 x 的射线与 \mathbb{S}^{n-1} 的(唯一)交点. 从而易见 $\partial r = \text{Id}$, 因此为了和上述定理导出矛盾, 我们还需证明“ r 为光滑映射”. (心安理得接受光滑的读者可略去下一段)

注意到对任意 x , 存在 $t(x) \geq 1$ 使得 $r(x) = t(x) \cdot f(x) + (1 - t(x)) \cdot x$, 又由 $|r(x)| = 1$, 从而可得(我们简写 t 代表 $t(x)$):

$$|f(x) - x|^2 \cdot t^2 + 2tx \cdot [f(x) - x] + |x|^2 - 1 = 0,$$

简单解这个二次方程(结合首项系数不为 0)可得

$$t(x) = \frac{x \cdot [f(x) - x] + \sqrt{(x \cdot [x - f(x)])^2 - |f(x) - x|^2 \cdot (|x|^2 - 1)}}{|f(x) - x|^2},$$

由分母不为 0, 从而 $t(x)$ 为关于 x 的光滑函数, 进而可知 r 光滑, 综上所述可知矛盾, 即证. ♣

利用一点点分析技术, 我们立刻有

定理 3.3.6: 连续版本的 Brouwer 不动点定理

任何连续映射 $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ 均有不动点。

证明 反证法, 若 f 无不动点, 从而由 \mathbb{B}^n 紧, 及 $u(x) = |f(x) - x| \neq 0$, 可知存在最小值 $c > 0$ 。回忆分析中的逼近技术, 故存在 $g: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ 上的光滑函数使得对任意 x 有 $|f(x) - g(x)| < \frac{c}{2}$, 进而 $|g(x) - x| > \frac{c}{2}$, 从而可知 g 没有不动点, 矛盾! ♣

再往前走一点点, 利用 \mathbb{R}^n 中任何“紧凸子集”都同胚于某个 \mathbb{D}^m , 我们有

定理 3.3.7: Brouwer 不动点定理

设 K 为 \mathbb{R}^n 中的非空紧凸子集, 则任意连续映射 $f: K \rightarrow K$ 有不动点。

证明 待施工。但大致思路是: 不妨假设 $0 \in K$, 从而考虑所有从 0 出发完全落在 K 里面的直线, 所对应的方向向量, 会长成某个线性子空间, 从而不妨设为 \mathbb{R}^m 。故 K 完全落在 \mathbb{R}^m 中, 接下去只需证明 K 和 \mathbb{D}^m 同胚即可。♣

最后, 我们再简单援引一些 Brouwer 不动点定理的应用:

- **生活中:** 将世界地图放在地上, 则一定存在地图上和地面上公共一点, 代表同一位置; 说搅拌圆柱形玻璃杯中溶液, 一定有始终不动的液滴。
- **线性代数中:** 可用来证明 Perron-Frobinus 定理: 所有元素都大于 0 的矩阵, 一定有正特征值以及对应的正特征向量。
- **泛函分析中:** 可以在 Brouwer 不动点定理基础上证明 Schauder 不动点定理。
- **博弈论中:** Nash 均衡的存在性, Hex 游戏的可终结性均和 Brouwer 不动点有关。

3.4 横截性再探——从 0 到 1

在本章开篇，我们便已经证明：横截相交是在“微小扰动”下保持不变的性质。那么在这一节中，我们将利用 Sard 定理 (如之前所承诺的那样) 与在上一章中所提到的 ε -邻域等技术，探索：

1. 横截相交的广泛存在性；
2. 同伦横截性定理 (同伦于某个横截相交的映射)。

这一节将相当的技术且枯燥，但这些必要的结论与准备工作将为我们展开后面的探索铺平道路。

3.4.1 横截相交的广泛存在性

定理 3.4.1: 横截性定理

设 M 为光滑带边流形, N, T 为光滑无边流形, 且 Y 为 N 的无边子流形。对于光滑映射 $F: M \times T \rightarrow N$, 对每个 $t \in T$, 令

$$f_t: M \rightarrow N, \quad f_t(p) = F(p, t).$$

若 F 与 ∂F 均与 Y 横截相交, 则对几乎所有的 $t \in T$, 有 f_t 与 ∂f_t 和 Y 横截相交。

证明 回忆“带边流形版本的横截原像定理”，我们有 $X = F^{-1}(Y)$ 是 $M \times T$ 的带边子流形，且有边界 ∂X 为 $X \cap \partial(M \times T) = X \cap (\partial M \times T)$ 。

设 $\pi: M \times T \rightarrow T$ 为投影映射，我们将证明：

- 若 $t \in T$ 为 $\pi: X \rightarrow T$ 的正则值，则 f_t 与 Y 横截相交；
- 若 $t \in T$ 为 $\partial\pi: \partial X \rightarrow T$ 的正则值，则 ∂f_t 与 Y 横截相交；

如果这两者成立，那么由 Sard 定理可知命题正确。又注意到上述两个论述在形式上是一致的，因此我们只需证明一者，那么另一者可自然模仿得证。

因此，我们现在集中精力证明：“若 $t \in T$ 为 $\pi: X \rightarrow T$ 的正则值，则 f_t 与 Y 横截相交”。设 $f_t(p) = q \in Y$ (若不存在这样的 p, q 则自动证完)，从而等价翻译即有 $F(p, t) = q \in Y$ 。回忆条件： F 与 Y 横截相交，从而

$$F_{*,(p,t)}T_{(p,t)}(M \times T) + T_q Y = T_q N,$$

也即任取 $b \in T_q(N)$ ，存在 $(w, l) \in T_{(p,t)}(M \times T) = T_p M \times T_t T$ (略显诡异的记号)，使得

$$b - F_{*,(p,t)}(w, l) \in T_q Y.$$

为证 $f_t \pitchfork Y$ ，我们需要构造 $v \in T_p M$ 使得

$$b - f_{t*,p}(v) \in T_q Y.$$

观察：若 $l = 0$ ，则我们取 $v = w$ 即可，因为此时自动有 $F_{*(p,t)}(w, 0) = f_{t*,p}(w)$ 。但 l 并不总是 0，因此我们需要用到 t 为 π 的正则值去“杀掉” l 。注意到：

$$\pi_{*,(p,t)} : T_p M \times T_t T \rightarrow T_t T$$

只是向第二个分量投影的映射。因此由 t 为 $X \rightarrow T$ 的正则值，因此 $\pi_{*,(p,t)}$ 为从 $T_{(p,t)}X \rightarrow T_t T$ 的满射，也即存在 $(u, l) \in T_{(p,t)}X$ 。又 F 为从 X 到 Y 的映射，故 $F_{*(p,t)}(u, l) \in T_q Y$ 。

现在选取 $v = w - u$ ，则由

$$b - f_{t*,p}(v) = b - F_{*(p,t)}[(w, l) - (u, l)] = (b - F_{*(p,t)}(w, l)) + F_{*(p,t)}(u, l) \in T_q Y,$$

进而我们完成了横截性定理的证明。 ♣

上述定理的证明冗长且复杂，令人望而生畏，原因大致有两个：

1. 没有几何直观铺垫，虽然这里笔者有意选取 T 代表参数流形，但这仍然提供不了过于深刻的帮助；
2. 直觉上对条件很抗拒：先天性的要求 F 和 ∂F 横截相交是否过于苛刻？这容易验证吗？

下面两个快速推论或许会让我们心理上更好理解横截性定理：

推论 3.4.1: 横截映射广泛存在性

给定任意光滑映射 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^K$ ，以及欧氏空间光滑子流形 $X \subset \mathbb{R}^K$ ，对于几乎所有的 $v \in \mathbb{R}^K$ ，“ v -平移”映射

$$f_v : M \rightarrow \mathbb{R}^K, \quad p \mapsto f_v(p) = f(p) + v$$

与 X 横截相交。

证明 毋庸置疑，我们构造 $F : M \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ ，且 $F(p, v) = f(p) + v$ ，从而显然 F 与 ∂F 均为淹没，因为其切映射均会出现恒同的部分 ($+v$ 部分提供的)。从而由横截性定理，“几乎所有的 $v \in \mathbb{R}^K$ ”，有 f_v 与 X 横截相交。 ♣

再进一步，当我们选取 f 为嵌入映射，我们此时就能“看见以上定理”，获得一些几何直观：

推论 3.4.2: 一般位置引理

设 M, N 为 \mathbb{R}^K 的子流形 (允许 M 带边)，则对几乎所有 $v \in \mathbb{R}^K$ ， $M + a$ 与 N 横截相交。

注：粗糙来讲，我们只需要记住一般位置引理的图景即可。这个结论为我们提供的直观是：在等距移动流形的时候，绝大多数时刻都会与其他流形横截相交。

3.4.2 横截相交与同伦

利用 ε -邻域定理以及上一节的横截性定理, 可以证明:

定理 3.4.2: 同伦横截定理

对任何从带边流形 M 到无边流形 N 的光滑映射 f , 以及 N 中的无边子流形 Y , “存在”同伦于 f 的光滑映射 $g: M \rightarrow N$ 使得 g 与 ∂g 均与 Y 横截相交。

此外, 如果 $X \subseteq M$ 为无边闭子流形, 并且“额外要求”: f 在 X 上与 Y 横截相交 (即切空间横截等式对于 $f^{-1}(Y) \cap X$ 中的点成立), 那么还可以“进一步要求” $g|_X = f|_X$ 。

证明 证明与上一小节十分类似, 可以想象的操作是: 用手把住 X 的像, 轻微抖动 $f(M)$, 就不难使得 $f(M)$ 与 Y 横截相交, 这里“轻微抖动 $f(M)$ ”想要严格说清就要事先把 $f(M)$ 框定在一个开的活动区域内 (即 ε -邻域), 再结合横截相交的广泛性即可说明。多说无益, 我们把细节留给好奇且执着的读者, 你们可以在任何一本微分拓扑的书中找到证明。♣

注意到 ∂M 总是 M 中的闭集, 因此我们有如下十分重要 (且常用) 的推论:

推论 3.4.3: 边界横截则整体横截

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 且 ∂f 与 N 中无边子流形 Y 横截相交, 则存在光滑映射 $g: M \rightarrow N$ 同伦于 f , 且 $\partial g = \partial f$ 。

简言之, 当我们处理实际问题时, 有如下的基本策略 (重要且常用!!!):

- 若处理的是同伦范畴下的问题, 那么总可以不妨假设研究的映射与某个子流形横截相交 (平地起高楼, 强行为自己创造有利条件, 比如下例);
- 若天然有 $h: \partial M \rightarrow N$ 与 Y 横截相交, 且 h “可以延拓成”整个定义在 M 上的映射, 那么我们实际上可以选取延拓 H 使得与 Y 横截相交。(将在下一章与下例中用到)

下面我们来看两个横截同伦定理应用的重要例子:

例 3.4.1 (余维数 2 不改变连通性). 设 M 为 m 维连通光滑流形, 若 $S \subseteq M$ 为维数 $k \leq m - 2$ 的光滑子流形, 则补集 $M \setminus S$ 是连通的。

证明 任取 $x, y \in M \setminus S$, 则由 $x, y \notin S$ 可知这两点与 S 横截相交, 从而考虑 $\gamma: I \rightarrow M$ 为 M 中连接 x, y 的道路, 则由上述推论, 存在同伦于 γ 的道路 γ' 使得 γ' 的像与 S 横截相交, 而两者维数和 $< m$, 从而相交一定为空, 进而可知 γ' 的像完全落在 S 中, 即证。♣

例 3.4.2 (余维数 3 不改变基本群). 设 M 为 m 维连通光滑流形, 若 $S \subseteq M$ 为维数 $k \leq m - 3$ 的光滑子流形, 则 $\pi_1(M \setminus S) = \pi_1(M)$ 。

证明 由上例可知, $M \setminus S$ 仍连通, 从而不妨选取 $p \in M \setminus S$ 为基点。进而由上一例的证明可知, 任意 M 中以 p 为基点的回路同伦于一个 $M \setminus S$ 中以 p 为基点的回路, 从而可知 $i_* : \pi_1(M \setminus S, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ 为满同态。又若 $i_*([\alpha]) = i_*([\beta])$, 从而存在同伦 $H : I \times I \rightarrow N$, 又 ∂H 的像为 α, β 和两点 (实际上是一点 p) 组成, 且均在 $M \setminus S$ 中, 因此自然有 ∂H 与 S 横截相交, 进而不妨假设 H 与 S 横截相交 (由上述推论), 从而由维数可得 H 的像和 S 相交为空, 从而 H 是完全落在 $M \setminus S$ 中的同伦, 故 $[\alpha] = [\beta]$, 从而 i_* 为单同态。故可知两者基本群相同。 ♣

注: 细心的读者会发现上述证明有一处并不严格, 也即 H 是从 $I \times I$ 出发的光滑映射, 但 $T \times I$ 在前面证明中已知并不为带边流形。一个弥补的方式是考虑用 \mathbb{D}^2 代替 $I \times I$, 然后类比标准同伦, 在 \mathbb{D}^2 上定义同伦。但简言之, 这并不是本质的 (因为在同伦范畴下, 用光滑同伦和连续同伦研究是等价的)。

做一点简单的推广, 我们立刻有:

定理 3.4.3: 余维数 l 不改变 $l-2$ 阶同伦群

设 M 为 m 维连通光滑流形, 若 $S \subseteq M$ 为维数 $k \leq m-l$ 的光滑子流形, 则

$$\pi_{l-2}(M \setminus S) = \pi_{l-2}(M).$$

下面是由上述结果推出的 (恶) 趣味性结果:

1. $S^4 \setminus S^1$ 单连通; (事实上可以证明其伦型为 S^2)
2. ...

3.5 必要练习

Problem 1. 证明: 对任意正整数 n , $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 均可嵌入到 S^{2n} 中; 且在此嵌入意义下, 当 $n \geq 3$ 时, $S^{2n} \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 单连通。

证明 由强 Whitney 嵌入定理可知: $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 可嵌入到 \mathbb{R}^{2n} 中, 由 \mathbb{R}^{2n} 与 $S^{2n} \setminus \{N\}$ 微分同胚 (这里 N 为北极点), 从而可知 $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 可嵌入到 S^{2n} 中。 ♣

证明 (略初等的证明)

我们考虑 $h: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$h(x^0, \dots, x^n, y^0, \dots, y^n) = (z^0, \dots, z^{2n}), \quad z^k = \sum_{i+j=k} x^i y^j.$$

进而我们定义

$$g: S^n \rightarrow S^{2n}, \quad g(x) = \frac{h(x, x)}{|h(x, x)|},$$

注意到 $h(x, x)$ 中全体坐标和为

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} x^i x^j = \left(\sum_{i=0}^{n+1} x^i \right)^2 = 1,$$

从而 $h(x, x) \neq 0$, 故 g 是良定义的。下面证明: $g(x) = g(y)$ 当且仅当 $x = \pm y$ 。

我们先证明一个十分基本的观察: $h(u, v) = 0$ 当且仅当 $u = 0$ 或 $v = 0$, 一方面显然, 我们考虑另一方面: 由 $u^0 v^0 = 0$, 不妨设 $u^0 = 0$, 进而可设 u 中最小非零坐标为 u^k , v 中最小非零坐标为 v^l , 则由

$$u_k v_l = u_0 v_{k+l} + \dots + u_k v_l + \dots + u_{k+l} v_0 = 0,$$

矛盾! 从而可知 u, v 必有一者全为 0。进而由 $g(x) = g(y)$, 可知存在 λ 使得 $h(x, x) = \lambda^2 h(y, y)$, 直接计算可得 $h(x + \lambda y, x - \lambda y) = 0$, 进而 $x + \lambda y = 0$ 或 $x - \lambda y = 0$, 又 $x, y \in S^n$, 从而可知 $|\lambda| = 1$ 。从而可知上述断言成立。

因此可知 g 诱导出 $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 到 S^{2n} 的光滑单射 f , 由局部坐标来看, f 每个分量均可表示成多项式函数, 因此可知 f 为浸入, 故结合 $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 紧和 S^{2n} Hausdorff, 我们可知 f 给出了一个嵌入。

进而当 $n \geq 3$ 时, 由切除余维数大于 3 的子流形不改变基本群, 从而可知命题成立。 ♣

◀ **注:** 事实上, 由 Sard 定理, 我们也可从第二个证明得出 $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ 可以嵌入到 \mathbb{R}^{2n} 中。

Problem 2. 设 M 是紧致的 m 维光滑流形, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ 是光滑嵌入。设 N 是 n 维光滑流形, $j: N \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ 是光滑映射。求证: 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在光滑嵌入 $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$, 使得 $\|f(p) - g(p)\| < \varepsilon$ 对一切 $p \in M$ 成立, 且 $g(M)$ 与 $j(N)$ 不相交。

证明 回忆：“给定任意光滑映射 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^K$ ，以及欧氏空间光滑子流形 $X \subset \mathbb{R}^K$ ，对于几乎所有的 $v \in \mathbb{R}^K$ ，“ v -平移”映射

$$f_v: M \rightarrow \mathbb{R}^K, \quad p \mapsto f_v(p) = f(p) + v$$

与 X 横截相交。”

从而对任意 ε ，我们能找到一个 \mathbb{R}^{m+n+1} 中向量 v 模长小于 ε ，且 $f_v = f + v$ 与 $j(N)$ 横截相交，从而取 $g = f_v$ 。则一方面 $\|f_v(p) - f(p)\| = \|v\| < \varepsilon$ ，且 g 显然也为嵌入，且由 g 与 $j(N)$ 横截相交，以及 $m+n < m+n+1$ ，从而两者相交为空。 ♣

¶注：在上一题的基础上，我们还可以得到更强的结果，直观上就是只扰动相交的部分：

Problem 3. 设 M 是紧致的 m 维光滑流形， $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ 是光滑嵌入。设 N 是 n 维光滑流形， $j: N \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ 是光滑映射，以及 U 为包含 $g(M) \cap j(N)$ 的开邻域，求证：对任意 $\varepsilon > 0$ ，都存在光滑嵌入 $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ ，使得 $\|f(p) - g(p)\| < \varepsilon$ 对一切 $p \in M$ 成立，且 $f(q) = g(q)$ 对所有 $q \notin f^{-1}(U)$ 成立，以及 $g(M)$ 与 $j(N)$ 不相交。

证明 留给有缘人。 ♣

Problem 4. 设 X 为 \mathbb{R}^N 中的子流形，给定正整数 $l \leq N$ ，证明：“几乎”对 \mathbb{R}^N 中每个 l 维线性子空间 V ，有 V 与 X 横截相交。

证明 注意到 X 为 \mathbb{R}^N 的正则子流形，回忆“横截性定理”，我们需要构造一个“参数流形” T ，以及“出发流形” M ，一个“目标流形” N ，以及 $F: M \times T \rightarrow N$ ，使得 F 与 N 中某个子流形横截相交，这样我们才能有对几乎每个“参数” t ， $F(\cdot, t)$ 和这个子流形横截相交。

对比已有的条件，我们不难有：

- 目标流形 N 选取为 \mathbb{R}^N ，因为我们要考虑其子流形 X ，这是相当自然的。
- 为了将线性子空间 V 和“ $F(\cdot, t)$ ”联系起来，注意到要确定 V ，无非就是由 l 个“线性无关的标架” $\{v_1, \dots, v_l\}$ 所确定的。因此联系最后需要“参数流形” T 中点取定，因此我们想到和取定一组标架结构相似，故我们选取参数流形：

$$T = \{(v_1, \dots, v_l) | v_1, \dots, v_l \text{ 线性无关}\} \subseteq (\mathbb{R}^N)^l.$$

从而自然的，我们选取出发流形 $M = \mathbb{R}^l$ 为 l 个系数，以在确定“参数” $\{v_1, \dots, v_l\}$ 之后，生成整个 V 。整理以上分析，我们重新书写如下：

考虑 $F: \mathbb{R}^l \times T \rightarrow \mathbb{R}^N$ ，

$$[(t_1, \dots, t_l), \{v_1, \dots, v_l\}] \mapsto t_1 v_1 + \dots + t_l v_l.$$

注意到 F 为淹没 (check!)，从而由横截性定理即可得知得证。 ♣

4.1 模 2 相交理论：定义与性质

在上一章开篇，我们便围绕子流形相交何时能成为子流形展开了讨论，并认识到“横截相交”是一种最广泛也最稳定的“相交模式”。既然如此广泛且稳定，那么我们就不难期待能从“相交”中进一步获得许多有趣的“几何不变量”。

我们现考虑 M 无边子流形 X, Y 之间的相交，一类最特殊，也是最简单的相交情形是： X 和 Y 的维数在 M 中互补，也即 $\dim X + \dim Y = \dim M$ 。这是因为若进一步， X 和 Y 横截相交，则 $X \cap Y$ 为零维子流形。

如果现在我们进一步假设 X, Y 均为闭子流形，且至少有一者紧，不妨设为 X ，从而 $X \cap Y$ 一定是有限个点。因此自然的，我们可以定义 X 和 Y 的相交数为 $\#(X \cap Y)$ 。

更进一步，如果任给两个 (不一定在同一流形中的) 流形，应当如何定义相交数呢，会遇到哪些障碍呢？为了获得灵感，我们先将上述翻译成更易推广的情形：对 $i: X \hookrightarrow M$ 为嵌入内射，且 i 与 Y 横截相交，则我们可以定义 X 和 Y 的相交数为 $\#(i^{-1}(Y))$ 。

稍稍回忆一下我们的出发点：“从相交出发探索几何不变量”。因此我们自然希望上述定义会是在“扰动”也即同伦下不变的。但是从下图看出，这个相交数在同伦意义下，并非始终是个常数：

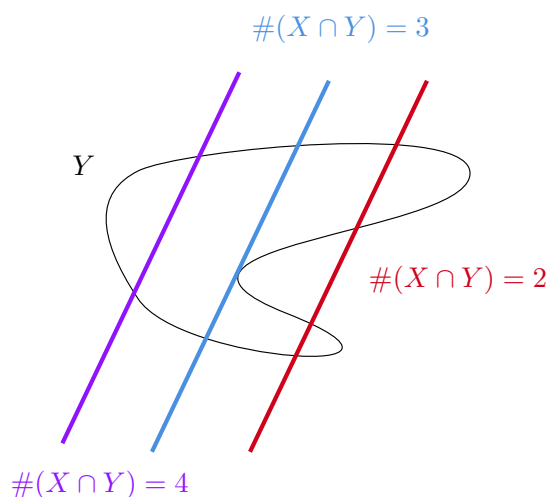


图 4.1: 横截相交数在模 2 意义下不变

但在上述图像中，我们可以看出，当 X 与 Y 横截相交 时，尽管 $\#(X \cap Y)$ 并不是常数，但在模 2 意义下为常数！且当 X 与 Y “不横截相交”时，由微扰下即可变成横截相交，因此我们也可以以微扰下的相交数代替其直观上的相交数。

综合上述讨论, 我们自然孕育出了如下“几何不变量”(我们稍后给出证明):

定义 4.1.1: 模 2 相交数

设 X 为无边紧流形, N 为任意无边光滑流形, Y 为 N 的无边子流形, 且 $\dim X + \dim Y = \dim N$. $f: X \rightarrow N$ 为光滑映射, 且与 Y 横截相交, 则可知 $f^{-1}(Y)$ 为 X 中零维子流形, 从而为有限个点, 进而我们定义 f 和 Y 的模 2 相交数

$$I_2(f, Y) := \#f^{-1}(Y) \pmod{2}.$$

进一步对任意光滑映射 $g: X \rightarrow N$, 我们选取 $f \pitchfork Y$ 且与 g 同伦 (由上一章的同伦横截定理, 我们知道这样的 f 一定存在), 则定义 g 与 Y 的模 2 相交数为

$$I_2(g, Y) := I_2(f, Y).$$

注: 关于上述定义, 读者或许会有如下两个自然的问题:

- $f^{-1}(Y)$ 为零维子流形的证明: $\operatorname{codim}_X f^{-1}(Y) = \operatorname{codim}_N Y = \dim N - \dim Y = \dim X$, 从而显然 $\dim f^{-1}(Y) = 0$;
- g 的模 2 相交数的定义是否依赖于同伦 f 的选取? 下面这个定理澄清了观点:

定理 4.1.1: 模 2 相交数为同伦不变量

设 $f_0, f_1: X \rightarrow N$ 同伦, 且均与 Y 横截相交, 则

$$I_2(f_0, Y) = I_2(f_1, Y).$$

因此进一步, 我们可知 $I_2(g, Y)$ 对任意光滑映射是良定义的, 且: 对任意 $g_0, g_1: X \rightarrow N$ 为同伦的光滑映射, 则

$$I_2(g_0, Y) = I_2(g_1, Y).$$

证明 我们只需证明横截相交的情形, 后面两句断言均为自然推论。设 $F: X \times I \rightarrow N$ 为从 f_0 到 f_1 的同伦。注意到: $\partial(X \times I) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$, 且 $\partial F|_{X \times \{0\}} = f_0$ 以及 $\partial F|_{X \times \{1\}} = f_1$, 且 f_0, f_1 均与 Y 横截相交, 则可知 ∂F 与 Y 横截相交。

因此回忆上一章末尾的“同伦横截定理”, 我们可以选取与 F 同伦的映射 G , 使得 $G \pitchfork Y$, $\partial G = \partial F$ 。从而可知 $G^{-1}(Y)$ 为 $X \times I$ 中一维子流形, 且有边界

$$\partial G^{-1}(Y) = G^{-1}(Y) \cap \partial(X \times I) = f_0^{-1}(Y) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Y) \times \{1\},$$

回忆“一维子流形的边界是偶数个点”, 从而可知 $\#f_0^{-1}(Y) + \#f_1^{-1}(Y)$ 为偶数, 故可知

$$I_2(f_0, Y) = I_2(f_1, Y),$$

综上所述我们完成了证明。

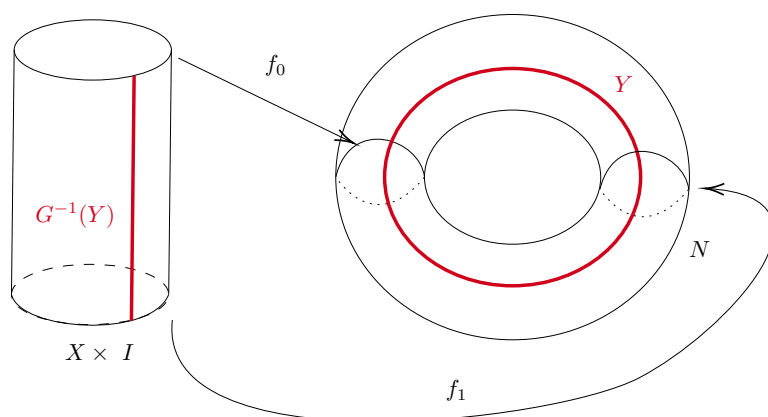


图 4.2: 模 2 相交数良定义图示

现在回到我们最清晰可见的情形：若 X, Y 为 M 中维数互补的正则子流形，则考虑嵌入映射 $i: X \hookrightarrow M$ ，可以定义 X 与 Y 的模 2 相交数为

$$I_2(X, Y) := I_2(i, Y).$$

换言之，如果 $X \pitchfork Y$ ，则模 2 相交数就是 $\#(X \cap Y) \pmod{2}$ 。

边界定理

现在我们来观察一个有趣的情形：“如果 X ”恰好实现成某个区域 Z 的边界，则简单画个图像， Y 与 X 横截相交，从而直观上，势必会穿入 Z 再穿出 Z ，因此穿入穿出——这暗示我们或许这种情形下 $I_2(X \cap Y) = 0$ ！

这启发我们如下更一般的定理：

定理 4.1.2: 边界定理

设 $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射，且 $\partial M = X$ ， $\partial F = f$ ，则对 N 中任意和 X 维数互补 (为 $\dim N$) 的正则子流形 Y ，有 $I_2(f, Y) = 0$ 。

证明 由同伦横截定理，存在同伦于 F 的光滑映射 $G: M \rightarrow N$ ，且 G 与 $g = \partial G$ 均与 Y 横截相交，且不难看到 g 与 f 同伦。从而有 $I_2(f, Y) = I_2(g, Y) = \#g^{-1}(Y) \pmod{2} = \#\partial(G^{-1}(Y)) \pmod{2}$ 。注意到 $G^{-1}(Y)$ 为 M 中的 1 维子流形，从而其边界有偶数个点，故可知 $I_2(f, Y) = 0$ ，综上所述我们完成了证明。



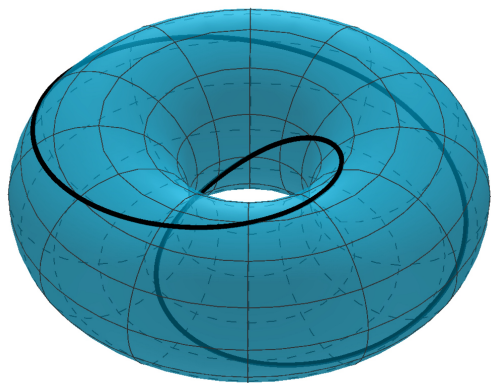
一个快速且有趣的推论是：

推论 4.1.1: 环面上的腰圆

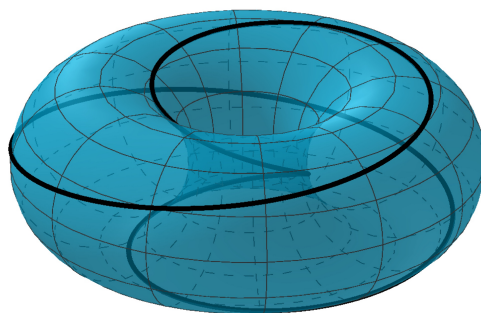
不存在环面上的二维带边子流形, 其边界为环面上的一个腰圆。进一步, 环面上的嵌入圆周若将环面分成两部分, 则一定可缩。

证明 对第一句断言, 考虑另一方向的圆周 (基本群的另一个生成元), 则易见两者相交数为 1, 从而若腰圆能实现成一个二维带边子流形的边界, 则模 2 相交数一定为 0, 矛盾!

对第二句断言, 注意到: 若不可缩, 则设其在基本群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 中对应的元素为 (m, n) , 注意到若 $m' = km, n' = kn$, 则事实上图像上该圆周只是在 (m, n) 的圆周上多绕行 k 圈, 此时并不为嵌入, 因此我们有 m, n 互素。进而一定存在一者为奇数, 故可选取其所在对应的生成元腰圆, 则与之相交数为奇数, 从而仿照上一断言我们知道不会分成两部分, 矛盾。 ♣



(a) 环面结 (1,2)



(b) 环面结 (1,3)

图 4.3: 沿着黑线剪开得到几块区域?

¶ 注: 事实上, 利用双曲几何我们可以证明更强的结论: 对任意 α, β 为 σ_g 上的简单闭曲线, 如果 α 和 β 不将曲面分成两部分, 则存在 σ_g 上的自同胚 ψ 使得 $\psi(\alpha) = \beta$ (一个很好的参考文献是 *A Primer on Mapping Class Group*)。从而借助这个结论, 显然不存在 \mathbb{Z}^2 的自同构 ψ_* 将 $(1, 0)$ 送至 $(0, 0)$, 故可知上述命题成立。

模 2 映射度

模 2 相交理论也为我们提供了一个有趣的几何不变量, 其具体地讲, 是针对同维数流形之间光滑映射的同伦不变量, 其定义依赖于如下事实:

定理 4.1.3: 模 2 映射度

设 $f: M \rightarrow N$ 为从紧流形 M 到连通流形 N 的光滑映射, 且 $\dim M = \dim N$, 则 $I_2(f, \{q\})$ 不依赖于 $q \in N$ 中的选取。这个值称为 f 模 2 的映射度, 记为 $\deg_2(f)$ 。

证明 我们需要如下的“唱片引理”：

对任意 f 的正则值 q , $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$ 为有限集, 且每个 p_i 存在开邻域 U_i , 使得 U_i 互不相交, 且均通过 f 微分同胚送至 q 的开邻域 V 。

证明留作练习, 从而我们选取与 f 同伦的映射 g 使得 g 与 $\{q\}$ 横截相交, 从而设 $g^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$, 则有 $I_2(f, \{q\}) = k \pmod{2}$, 利用连通性和局部常值不难证明这个数不依赖于 q 的选取。♣

¶ 注：事实上模 2 映射度的计算相当容易, 我们只需要选取一个正则值 y (Sard 定理告诉我们这样的 y 充分多!), 计算 $\#f^{-1}(y) \pmod{2}$ 即可, 比如 $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$, 则可知 $\deg_2(f) = n \pmod{2}$ 。

4.2 模 2 相交理论：应用

在这一节中，我们将看到模 2 相交理论在拓扑上的有趣应用。

4.2.1 模 2 环绕数

开门见山的讲，我们引入环绕数这一概念的动机源自于传统的 Jordan 曲线定理：对于 \mathbb{R}^2 上的任一条简单闭曲线，都会将平面分成“内外两部分”。那么我们自然要问，我们如何去“衡量内外”呢？

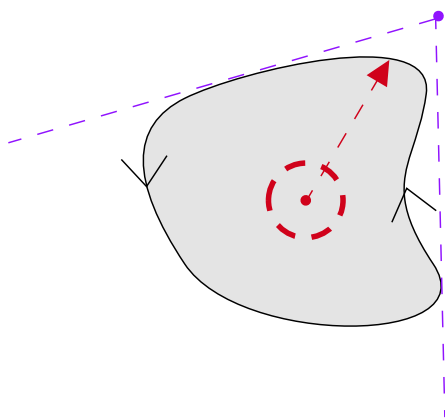


图 4.4: 内部环绕数为 1，外部环绕数为 0

如上图所示，我们考虑一个从不在曲线上的点出发，观察其与曲线上点连线箭头所环绕的总角度，容易看见，处在“曲线内部”的点会环绕出完整的圆周，而在“曲线外部”的点则往往不会环绕出完整圆周。从而这表明：我们可以通过引入“环绕数”去衡量曲线内部与外部。

推而广之，我们设 X 为 $n-1$ 维的紧致无边连通流形，以及光滑映射 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ (注意在上述情形无非是取 f 为嵌入映射)。我们想研究 f 是在 \mathbb{R}^n 中是如何扭曲、环绕 X 的 (比如标准的圆周与嵌入的任意曲线)，因此任取 z 不在 $f(X)$ 中，考虑映射

$$u: X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}.$$

不难想象，我们所关心的“环绕数”正可以借助上一节定义的“映射度”来描述！

定义 4.2.1: 模 2 环绕数

在上述记号下，我们记 $W_2(f, z) := \deg_2(u)$ 为 f 绕 z 的模 2 环绕数。

在正式证明 Jordan-Brouwer 分离定理之前，我们先利用一个简单的定理去进一步理解环绕数。在正式陈述定理之前，我们仍先给出一些基本的观察：如图 4.4 所示，曲线环绕出的区域为阴影部分，那么我们事实上直接有 z 在阴影部分内，则环绕数为 1，在阴影部分外，环绕数为 0，从而我们猜测 (也确实有)：

定理 4.2.1: 环绕数的一个基本性质

设 X 为一带边紧流形 D 的边界, $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为光滑映射, $\partial F = f$, 则对不在 $f(X)$ 中的 F 的正则值 z (想想为什么一定存在?), 有 $F^{-1}(z)$ 为有限集, 且 $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z) \pmod{2}$ 。换言之 f 绕 z 的环绕数和 $F(D)$ “击中” z 的次数模 2 相等。

¶ 注: 这里或许需借助一些画图做一些直观的理解, 要点在于 $f(X)$ 会出现环绕与自交, 此时如何确定出 $F(D)$ 呢? (给定 X 的一个大致方向, 环绕区域内部始终在这个方向的同一侧)

证明 我们分为如下几步顺次证明 (读者也可暂略证明部分, 选择自行完成):

步骤 1: 若 $z \notin F(D)$, 则 $W_2(f, z) = 0$ 。

回忆 f 环绕数的定义: $W_2(f, z) = \deg_2(u)$, 注意到 u 的定义, 以及 $z \notin F(D)$, 从而我们可以定义

$$U: D \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad U(x) = \frac{F(x) - z}{|F(x) - z|}$$

且显然 $\partial U = u$ 。进而由边界定理, 可知 $\deg_2(u) = I_2(u, \{v\}) = 0$ 。(这里 v 为任一正则值)

步骤 2: 设 $F^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_l\}$, B_i 为互不相交的 y_i 的邻域, 且均微分同胚于 \mathbb{R}^n 中标准闭球。我们进一步可以要求 B_i 与 $X = \partial D$ 不相交, 设 $f_i = F|_{B_i}: B_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则有 $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \pmod{2}$ 。(类比一下留数定理!)

我们考虑 $D' = D - \cup_{i=1}^l B_i^\circ$, 从而 $z \notin F(D')$, 则对 $F' = F|_{D'}$, $f' = \partial F': X \cup \partial B_1 \cdots \cup \partial B_l \rightarrow \mathbb{R}^n$, 结合步骤 1, 我们有 $W_2(f', z) = 0$ 。显然: $W_2(f', z) = W_2(f, z) + W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z)$, 故可立即得到 $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \pmod{2}$ 。

步骤 3: 利用 z 的正则性进一步选取 B_i 使得 $W_2(f_i, z) = 1$, 进而完成证明。

注意到 z 为 F 的正则值, 从而在任意 y_i , F_{*, y_i} 满射, 进而结合维数关系, 可知为线性同构, 从而 F 在 y_i 为局部微分同胚, 故可选取 B_i 使得 f_i 将 ∂B_i 微分同胚的送至球面 \mathbb{S}^{n-1} , 不难看出此时 $W_2(f_i, z) = 1$ 。

综上, 我们完成了证明。 ♣

4.2.2 Jordan-Brouwer 分离定理

现在假设 X 为 \mathbb{R}^n 中的紧致连通超曲面, 如果其“真的能”将 \mathbb{R}^n 分成两个区域, 那么其必然会是一个紧致 n 维流形 D 的边界, 从而由上一小节的定理, 我们容易发现对于任意 $z \notin X$, 若 $z \in D$, 则 $W_2(i, z) = 1$ (这里 $i: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为嵌入映射, 以后我们也用 $W_2(X, z)$ 表示); 若 $z \notin D$, 则 $W_2(X, z) = 0$ 。我们下面将从这个角度出发证明 Jordan-Brouwer 分离定理。

步骤 1: 设 $z \in \mathbb{R}^n - X$, 则对任意 $x \in X$ 与其邻域 U , 存在 U 中的点与 z 的曲线和 X 不相交。

我们使用“连通性归纳法”, 记使得上述断言成立的所有 x 构成的集合为 Z , 我们希望证明 $Z = X$ 。自然分为如下三个小步骤:

- Z 为闭集: 设有 $\{x_n\} \subseteq X$, 且 $x_n \rightarrow x$, 则对 x 的任一邻域 U , 我们总有 x_n 落在其中, 选择其一个完全落在 U 中的邻域, 则由存在其中点与 z 的曲线和 X 不交, 从而直接选取这个点与曲线即可。
- Z 为开集: 注意到 X 为 $n-1$ 维流形, 假设断言对 x 成立, 则选取其一个同胚于 \mathbb{R}^{n-1} 的开邻域 U 即可说明, 余下留作一个并不趣味的练习。
- Z 不为空集: 由 X 紧, 选取其上距离 z 最近的点 x , 以及连接这两点的直线即可。

步骤 2: $\mathbb{R}^n - X$ 至多两个连通分支。

注意到 X 为 $n-1$ 维流形, 从而可以选取一个小球 B 使得 X 将 B 分割成两个连通分支, 也即 $B - X$ 有两个连通分支。从而设 z_0, z_1 为 $B - X$ 中不在同一连通分支的两点, 从而由步骤 1 可知, 对于任意 $z \in \mathbb{R}^n - X$, 其有与 z_0 或 z_1 的曲线与 X 不相交, 也即完全落在 $\mathbb{R}^n - X$ 中, 从而可知 $\mathbb{R}^n - X$ 至多两个连通分支。

步骤 3: 如果 z_0 和 z_1 在 $\mathbb{R}^n - X$ 的同一连通分支中, 则有 $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$ 。

回忆环绕数的定义无非就是映射度, 而证明映射度相等, 或者更本质的, 相交数相等, 我们只需要构造同伦即可! 设 z_t 是连接 z_0 和 z_1 的曲线, 则我们有同伦

$$u_t : X \times I \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad u_t(x) := \frac{x - z_t}{|x - z_t|},$$

故我们可立即得到 $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$ 。

步骤 4: 给定点 $z \in \mathbb{R}^n - X$ 以及方向向量 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 考虑射线 $r = \{z + tv : t \geq 0\}$, 则 r 与 X 横截相交当且仅当 v 是 $u : X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ 的正则值。故几乎每个方向的射线与 X 横截相交。

考虑 $g : \mathbb{R}^n - \{z\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, 其中 $g(y) := (y - z)/|y - z|$, 从而对 $i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, 容易看见 $u = g \circ i$, 从而我们要证的就是: $u \pitchfork \{v\}$ 当且仅当 $X \pitchfork g^{-1}(v)$ 。事实上, 我们有如下更一般的引理 (在下一引理中选取 $f = i$ 即可):

引理 4.2.1. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为流形间的光滑映射, 且 $g \pitchfork W$, 这里 W 为 Z 的正则子流形, 从而 $f \pitchfork g^{-1}(W)$ 当且仅当 $g \circ f \pitchfork W$ 。

证明 注意我们只需要证明局部上的结果, 回忆局部上 $g \pitchfork W$ 当且仅当存在 $h : W \rightarrow \mathbb{R}^l$, 使得 0 为 h 正则值, 且 0 为 $h \circ g$ 正则值。从而易见 $g \circ f \pitchfork W$ 当且仅当 0 为 $h \circ g \circ f$ 的正则值, 自然当且仅当 $g^{-1}(h^{-1}(0))$ 为 f 的正则值, 也即 $f \pitchfork g^{-1}(W)$, 从而可知引理成立。♣

步骤 5: 设 $z_0 \notin X$, 且从 z_0 出发的射线 r 与 X 非空的横截相交 (由上一步骤知这一定能办到, 且交点个数一定有限), 对任意 r 上不在 X 中的 z_1 , 设线段 $\overline{z_0 z_1}$ 和 X 交点个数为 l , 则 $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \pmod{2}$ 。

对这样的 r 及其对应的方向向量 v , 我们容易看见设 $u_0(x) = (x - z_0)/|x - z_0|$, $u_1(x) = (x - z_1)/|x - z_1|$, 则 $\#u_0^{-1}(v) = \#u_1^{-1}(v) + l$ 。回忆旋转数之定义, 即可知道 $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \pmod{2}$ 。

步骤 6: 综合上述讨论，我们可以得到 $\mathbb{R}^n - X$ 确实有两个连通分支：

$$D_0 = \{z : W_2(X, z_0) = 0\}, \quad D_1 = \{z : W_2(X, z_1) = 1\}.$$

- 由步骤 5 可知： D_0 和 D_1 均不为空集，因为射线上至少有一个点；
- 由步骤 3 可知， D_0 和 D_1 处在两个连通分支；
- 由步骤 2 可知， D_0 和 D_1 恰好就是 $\mathbb{R}^n - X$ 仅有的两个连通分支。

步骤 7: 当 $|z|$ 充分大时， $W_2(X, z) = 0$ 。

回忆模 2 旋转数之定义，对 $u(x) = (x - z)/|x - z|$ ，由 x 紧，从而当 $|z|$ 充分大时， $u(X)$ 为 \mathbb{S}^{n-1} 落在 $z/|z|$ 的一个小邻域内，从而不难知道此时映射度为 0，也即 $W_2(X, z) = 0$ 。

步骤 8: 综合上述讨论，证明 *Jordan-Brouwer* 分离定理：

定理 4.2.2: *Jordan-Brouwer* 分离定理

设 X 为 \mathbb{R}^n 中紧连通超曲面，则 $\mathbb{R}^n - X$ 有两个连通分支，“内部” D_1 和“外部” D_0 ，且 $\overline{D_1}$ 为紧致带边流形，且 $\partial \overline{D_1} = X$ 。

证明 利用步骤 7，可知 D_1 有界，从而 $\overline{D_1}$ 紧，且由 $\mathbb{R}^n = D_0 \sqcup X \sqcup D_1$ ，从而有 $\overline{D_1} = D_1 \cup X$ ，因此为证 $\overline{D_1}$ 为带边流形，我们只需要在每一点 $x \in X$ 处赋予局部坐标卡。

注意到 X 为 $n - 1$ 维正则子流形，从而存在 x 的开球 B 与微分同胚 $\psi : B \rightarrow \psi(B) = B'$ 使得 $X \cap B$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^{n-1} \cap B'$ 。从而结合步骤 3， D_0 和 D_1 是两个连通分支，从而不难有 $\psi^{-1}(\mathbb{H}^n \cap B')$ 或 $\psi^{-1}(-\mathbb{H}^n \cap B')$ 中一者完全落在 $D_1 \cup X$ 中，这便给出了一个局部坐标卡。♣

推论 4.2.1: 超曲面的定向性——一道丘赛 P6

所有 \mathbb{R}^n 中的紧连通超曲面 (总假定无边) 均可定向。

证明 由 *Jordan-Brouwer* 分离定理，其可将 \mathbb{R}^n 划分为内外两区域，且可实现成内部流形 M 闭包的边界。由 M 为开子流形，从而可定向，因此可诱导出其边界上的定向，即证。♣

推论 4.2.2: 非平凡的应用

实射影平面 $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ 不能光滑嵌入 \mathbb{R}^3 中。

证明 反证法，若不然，则可知 $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ 可视为 \mathbb{R}^3 中的紧连通超曲面，故可定向，矛盾！♣

注：一般来讲上述定理证明有两种，一种是上述借助微分拓扑的技术，另外一种则是借助代数拓扑中的 *Stiefel-Whitney* 示性类。更一般的关于能否嵌入、淹没、浸入以及配边等问题，都可以借助示性类来刻画“障碍”，从而给出回答。

4.2.3 Borsuk-Ulam 定理

我们将利用模 2 环绕数证明拓扑上另一经典结果，其中一个版本是：

定理 4.2.3: Borsuk-Ulam 定理——环绕数版本

设 $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ 为光滑映射，且 $0 \notin f(\mathbb{S}^k)$ ，称 f 为奇映射，如果

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^k,$$

则有 $W_2(f, 0) = 1$ 。

另外一个十分常见的版本是：

定理 4.2.4: Borsuk-Ulam 定理——对径点版本

设 $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ 为连续映射，则存在 $x \in \mathbb{S}^k$ 使得 $f(x) = f(-x)$ 。

注：若取 $k = 2$ ，则可说明地球上一定有一组对径点，温度和湿度都相同。考虑地理环境，这个结论很不平凡。

我们下面的行文思路是：

1. 利用归纳法证明环绕数版本的 Borsuk-Ulam 定理；
2. 从环绕数版本出发，给出若干等价命题，并最终得出最常用的对径点版本；
3. 从这些 Borsuk-Ulam 定理出发，得出一些有趣的推论，如火腿三明治定理。

环绕数版本的证明

步骤 1: 当 $k = 1$ 时，命题成立。

回顾模 2 环绕数的定义，我们为了计算 $W_2(f, 0)$ ，无非就是考虑 $f_1(x) := f(x)/|f(x)|, \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ，计算 f_1 的模 2 映射度 $\deg_2(f_1)$ 。注意到由 f 为奇映射，可知 $f_1(-x) = -f_1(x)$ 。我们有如下两种计算其映射度的思路：

1. **微分拓扑:** 先证明 f_1 的提升 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，也即存在 $f(e^{it}) = e^{ig(t)}$ ；再证明存在整数 q 使得 $g(2\pi) = g(0) + 2q\pi$ ；最后再证明 $\deg_2(f_1) \equiv q \pmod{2}$ ，从而可知模 2 映射度为 1。
2. **代数拓扑:** 含糊的讲， f_{1*} 诱导出的基本群同态显然为 $-1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ，从而其拓扑映射度为 -1 。但考虑拓扑映射度和微分映射度的关系略要花费一些功夫。

细节留给执着的读者，我们由上述便可知 $W_2(f, 0) = \deg_2(f_1) = 1$ ，也即 $k = 1$ 时命题成立。

后续证明的动机: 当 $k = 1$ 时, 命题成立。我们为了归纳, 自然考虑视 \mathbb{S}^{k-1} 为 \mathbb{S}^k 的“赤道”, 也即写作 $(x^1, \dots, x^k, 0)$ 。为了计算 $W_2(f, 0)$, 无非就是要选取一个 \mathbf{v} 以及直线 l , 计算 f 与 l 相交的次数。那么选取 l 和赤道不相交, 就可以去结合归纳假设计算了。

步骤 2: 合适的向量 \mathbf{v} 和直线 l 的选取。

设 f 限制在赤道上的映射为 $g: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, 由 Sard 定理, 存在单位向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^k$ 使得同时为映射

$$\frac{g}{|g|}: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{S}^k, \quad \frac{f}{|f|}: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{S}^k$$

的正则值。由 f 为奇映射 (回忆即有 $f(-x) = -f(x)$), 从而 g 也为奇映射, 因此 $-\mathbf{v}$ 也为上述两个映射的正则值。现在考虑直线 $l = \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}$, 则有

- 由 $g/|g|$ 的维数关系以及 Sard 定理可知, \mathbf{v} 与 $-\mathbf{v}$ 为正则值即意味着这两者原像均为空集, 换言之: g 与直线 l 永远不交。
- 回忆引理 4.2.1, 从而可知 \mathbf{v} 与 $-\mathbf{v}$ 为 $f/|f|$ 的正则值意味着 $f \pitchfork l$ 。

步骤 3: $W_2(f, 0)$ 转化为原像集的元素个数, 便于计算。

现在, 由定义我们有

$$W_2(f, 0) = \deg_2 \left(\frac{f}{|f|} \right) = \# \left(\frac{f}{|f|} \right)^{-1} (\mathbf{v}) \pmod{2}.$$

回忆 f 为奇映射, 从而 $f/|f|$ 和 $+\mathbf{v}$ 相交的次数和 $-\mathbf{v}$ 的次数相同, 因此我们实际上有

$$\# \left(\frac{f}{|f|} \right)^{-1} (\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(l).$$

上面我们用到了映射 f 的对称性, 现在我们再用直线 l 的对称性, 我们可以单独考虑上半球面去计算 (这样就能和赤道联系起来!), 设 f_+ 表示 f 限制在上半球面 \mathbb{S}_+^k , 也即坐标满足 $x^{k+1} \geq 0$ 的那些点。那么此时利用对称性, 以及赤道的像和 l 不交, 我们就有

$$\# f_+^{-1}(l) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(l),$$

从而我们有

$$W_2(f, 0) = \# f_+^{-1}(l) \pmod{2}.$$

步骤 4: 利用正交投影转化 g 以使用归纳假设。

定理 4.2.1 是我们的一个出发点, 为了将 $g: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ 划归到归纳假设能使用的维数, 也即 \mathbb{R}^k , 我们自然需要一个投影映射, 因此更自然地, 考虑 l 的正交补空间 V , 以及正交投影 $\pi: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow V$, $\pi(x) = x - \langle x, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, 且 $\pi^{-1}(0) = l$ 。进而考虑 $\pi \circ g: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$, 且由 g 与 l 不交, 故 $\pi \circ g$ 与 0 不交, 进而将 V 与 \mathbb{R}^k 等同, 结合归纳假设, 我们有 $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$ 。

步骤 5: 将 $\pi \circ g$ 与 f 联系起来。

注意到 $f_+ \pitchfork l$, 从而可知对

$$\pi \circ f_+ : \mathbb{S}_+^k \rightarrow V$$

有 $\pi \circ f_+ \pitchfork l$ (这里我们再一次用了横截相交的复合仍为横截相交)。对比 $\pi \circ g$ 与 $\pi \circ f_+$, 以及 \mathbb{S}^{k-1} 为 \mathbb{S}^k 的边界, 从而可知 $\pi \circ g = \partial(\pi \circ f_+)$ 。因此回忆定理 4.2.1, 这一关于环绕数的基本性质, 我们立刻有

$$W_2(\pi \circ g, 0) = \#(\pi \circ f_+)^{-1}(0).$$

但是事实上, $\#(\pi \circ f_+)^{-1}(0) = f_+^{-1}(l)$, 故由 步骤 4, 我们立刻有

$$W_2(f, 0) = \#(\pi \circ f_+)^{-1}(0) = W_2(\pi \circ g, 0) = 1 \pmod{2}.$$

从而由归纳原理, 我们完成了证明。

若干有趣的等价命题

在证明其他等价命题之前, 我们先将 Borsuk-Ulam 定理的光滑环绕数版本, 弱化为连续环绕数版本:

定理 4.2.5: Borsuk-Ulam 定理——连续环绕数版本

设 $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ 为连续映射, 且 $0 \notin f(\mathbb{S}^k)$, 称 f 为奇映射, 如果

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^k,$$

则有 $W_2(f, 0) = 1$ 。

证明 联系连续与光滑的利器就是 Whitney 逼近定理: 设 $f : M \rightarrow N$ 为连续映射, 则存在 $g : M \rightarrow N$ 为光滑映射, 且与 f 同伦。设现有 $g \sim_H f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, 且 g 光滑, 但遗憾的是 g 不一定为奇映射, 因此我们考虑

$$\hat{g} : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \quad \hat{g}(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2},$$

以及同样对同伦做“奇化”:

$$\hat{H} : \mathbb{S}^k \times I \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \quad \hat{H}(x, t) = \frac{H(x, t) - H(-x, t)}{2}.$$

由 f 为奇映射, 从而 $\hat{H}(\cdot, 0) = f$, 进而可知 $f \sim_{\hat{H}} \hat{g}$, 且 \hat{g} 为光滑奇映射, 故由环绕数为同伦不变量, 可知 $W_2(f, 0) = 1$. ♣

推论 4.2.3: Borsuk-Ulam 定理——奇映射不零伦

设 $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ 为连续奇映射, 则其不零伦, 从而也一定为满射。

证明 显然此时 $\deg_2(f) = W_2(f, 0) = 1$, 从而不为 0, 更不可能零伦。 ♣

推论 4.2.4: Borsuk-Ulam 定理——低维球面版本

不存在 $S^k \rightarrow S^{k-1}$ 的连续奇映射。

证明 若存在，则视 S^{k-1} 为 S^k 的赤道，则可将其视为 $f: S^k \rightarrow S^k$ 的连续奇映射，因为像集为 S^{k-1} ，不满射，与上一推论矛盾！ ♣

推论 4.2.5: Borsuk-Ulam 定理——到 \mathbb{R}^k 的奇映射

设 $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ 为连续奇映射，从而一定存在 $p \in S^k$ ， $f(p) = 0$ 。

证明 若不然，使用反证法，则有 $f/|f|$ 为 $S^k \rightarrow S^{k-1}$ 的连续奇映射，从而矛盾。 ♣

最后，我们可以给出 Borsuk-Ulam 定理对径点版本的证明：

证明 考虑 $g(x) = f(x) - f(-x)$ 则为 $S^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ 的奇映射，从而一定有零点，即证。 ♣

¶ **注：** 一个快速推论是， S^k 不能 (连续) 嵌入 \mathbb{R}^k 中，因为一定存在一组对径点映到同一点。大家也可以思考光滑嵌入应该怎么去直接证明。(Hint: 淹没为开映射)

¶ **注：** 在代数拓扑中，为了证明 Borsuk-Ulam 定理，关键也是证明不存在高维球面到低维球面的奇映射，这是因为奇映射会诱导出 $H^1(\mathbb{R}P^{k-1}, \mathbb{Z}_2)$ 到 $H^1(\mathbb{R}P^k, \mathbb{Z}_2)$ 的非零环同态，但由上同调环的乘法运算可以很快得出矛盾。

火腿三明治定理

定理 4.2.6: 火腿三明治定理

一个由火腿、面包、奶酪做成的三明治一定可以切一刀，使得火腿、面包、奶酪都分成体积相同的两块。严格地讲，任给 \mathbb{R}^n 中的 n 个有界可测集合 A_i ，都能找到一个 $n-1$ 维超平面，均分它们的测度 (去掉这个平面后， \mathbb{R}^n 的两个连通分支和 A_i 交集测度相同)。

留做一个趣味但并不容易的练习。

4.3 定向相交理论

很明显，在模 2 相交理论中，我们定义的模 2 相交数过于“弱”，其只能反映出一些有限且粗糙的性质，并不能为我们带来更深刻的几何不变量。因此我们就需要重新出发，寻找更“强大”的相交数。

回忆一开始我们对相交数模 2 的缘由：是因为我们希望所定义的相交数在“同伦扰动”下是不变的，但我们发现在此时只有 $\#(X \cap Y)$ 的奇偶性是保持的。从而现在很自然的，为了“让每个 $\#(X \cap Y)$ 中的点都派上用处”，我们要为每个点进行加权。

更精准的，我们要将每个点赋予“ ± 1 ”，自然的如何赋予就取决于流形之间的定向问题了。

4.4 必要练习

结合 Bott Tu

先介绍 GH 收敛的基本概念（笔记），一个自然的问题是，有多少性质在这个收敛过程中保持，又有多少损失了？（完全损失拓扑，因为任意一个度量空间都可以用离散个点逼近）

在黎曼流形中，对于具有一定几何刚性的流形全体，其上的流形结构是可以在 GH 收敛下保持的，然后证明刚性定理，然后介绍 Cheeger 有限性定理

值得关注的是上述预先要求两点，其一 GH 收敛，且收敛的对象也落在 $\mathcal{M}(n, D, v)$ 中，这一点总能做到吗？介绍 Gromov 预紧性定理，然后介绍江文帅的 PPT 和工作