向量丛和示性类笔记1—基本概念

($\mathbb{P}^n$上典范线丛) 我们考虑

$$\gamma_n^1=\{([\pm x],v):[\pm x]\in\mathbb{P}^n,v=\lambda x\in\mathbb{R}^{n+1},\lambda\in\mathbb{R}\},$$

我们想说明这是$\mathbb{P}^n$上的一个线丛，只需要说明局部平凡性即可，任取S^n中不包含对径点的开集U'，设其在商映射下的像集为$U\subseteq\mathbb{RP}^n$，则显然U为开集，我们取$h:U\times\mathbb{R}\to\pi^{-1}(U)$，$h([\pm x],\lambda)=([\pm x],\lambda x)$，显然这是一个连续双射，因为可以直接构造出逆映射从而可知这是同胚。

我们现在进一步证明对$n\geq 1$，γ_n^1均不为平凡丛：注意到其为平凡丛等价于其有一个恒不为0的截面$s:\mathbb{P}^n\to\gamma_n^1$，也即存在一个连续恒不为0函数$t:S^n\to\mathbb{R}$，使得$s([\pm x])=([\pm x],t(x)x)$，则可知

$$t(x)x=t(-x)\cdot(-x),$$

进而$t(-x)=-t(x)$，从而由S^n连通，可知$t(x)$一定有零点，矛盾！

一个直观的例子是γ_1^1，这很明显是一个Mobius带。

（**Milnor Problem 3-A**）

Proof: 由f为淹没，从而任意$x\in M$，$\ker f_{*,x}$为T_xM的线性子空间，为了证明

$$\kappa_f:=\bigsqcup_{x\in M}\ker f_{*,x},\quad \pi_2:\kappa_f\to M$$

构成了M上的向量丛，只需要构造出合适的局部平凡化即可。由淹没的标准型，可知存在x的局部坐标卡$(U,\varphi=(x^i))$与$f(x)$的局部坐标卡$(V,\psi=(y^\alpha))$使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^n),$$

从而我们选取TM在$U'=U\cap f^{-1}(V)$上的局部平凡化为$h:U'\times\mathbb{R}^m\to\pi_1^{-1}(U')$，$(p,a^1,\cdots,a^m)\mapsto a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$，注意到此时

$$\ker f_{*,p}=\operatorname{span}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p\right\},$$

从而我们有可以选取$g:U'\times\mathbb{R}^{m-n}\to\pi_2^{-1}(U')$，

$$(p,b^1,\cdots,b^{m-n})\mapsto\sum_{i=1}^{n-m}a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^{i+n-1}}\right|_p,$$

且g显然线性，从而这说明κ_f确实是向量丛。（这里关键就是找到局部标架）

在上述标架意义下，可知$f^*(TN)_x\cap(\kappa_f)_x=\{0\}$，从而显然两者正交，进而有直和。

（**Milnor Problem 3-B**）

Proof: 为了证明ξ/η为向量丛，我们只需证明局部平凡化（并验证给出的同胚是线性的），事实上对任意$p\in M$，选取其开邻域U使得有$\xi|_U$和$\eta|_U$均为平凡丛，且设前者有正交标架$s_1,\cdots,s_N$，后者有正交标架$t_1,\cdots,t_n$，这里$n<N$，从而我们先从$t_1,\cdots,t_n$出发延拓出一组$\xi|_U$上的正交标架，我们考虑ξ上的黎曼度量g，以及矩阵（注意这里的p是选定的）

$$G=[g(s_i(p),t_j(p))]_{N\times n},$$

从而考虑线性方程$G(x^1,\cdots,x^n)^T=0$，则这意味着对任意i，$g(s_i(p),x^jt_j(p))=0$，这表明$x^jt_j(p)=0$，从而有$x^j=0$，因此只有零解，进而G秩为n，不妨设为前n行，则我们断言

$$t_1(p),\cdots,t_n(p),s_{n+1}(p),\cdots,s_N(p)$$

线性无关，事实上若不然，则有$k^jt_j(p)=l^is_i(p)$，故可知$k^jt_j(p)$和$s_1(p),\cdots,s_n(p)$正交，进而与上述假设矛盾，因此可知断言成立。

进而由线性无关是开性质，换言之存在p包含于U的开邻域V使得$t_1,\cdots,t_n,s_{n+1},\cdots,s_N$在$V$上处处线性无关，进而我们利用Gram-Schmidt正交化，我们可以得到$\xi|_U$的一组正交标架$t_1,\cdots,t_N$。

现在对$\pi_2:\xi/\eta\to M$，构造p处的局部平凡化，选取$g:V\times\mathbb{R}^{N-n}\to\pi_2^{-1}(V)$，$(q,a^{N-n+1},\cdots,a^N)\mapsto a^k(t_k+\eta_k)$，上述证明也蕴含了$\eta^\perp\cong\xi/\eta$。

向量丛的基本性质

命题: 设$E\to X$为秩为k的向量丛，则$E\cong\underline{\mathbb{R}^k}$等价于存在$s_1,\cdots,s_k\in\Gamma(E)$，使得对任意$x\in X$，我们有$s_1(x),\cdots,s_k(x)$线性无关。

命题: 设X为紧Hausdorff空间，$E\to X$为向量丛，$Y\subseteq X$为子空间，若$s\in\Gamma(E|_Y)$，则我们可以将其延拓成E上的截面s'使得$s'|_Y=s$。

Proof: 关键想法还是单位分解，假设$U_0=X-Y$则其开，并假设$U_1,\cdots,U_l$覆盖了X，且$E|_{U_i}$平凡，我们选取从属于$\{U_i\}_{0\leq i\leq l}$的一组单位分解$\rho_i:X\to[0,1]$，满足$\mathrm{supp}\rho_i\subseteq U_i$，且$\sum\limits_{i=0}^{l}\rho_i=1.$

注意到$\overline{U_i}$为紧集，我们考虑$s_i:=s|_{\overline{U_i}\cap Y}$，又$E|_{\overline{U_i}\cap Y}\cong(\overline{U_i}\cap Y)\times\mathbb{R}^k$，因此$s_i$可以看成是从$\overline{U_i}\cap Y\to\mathbb{R}^k$的连续，从而由Tietz扩张引理（设$X$是正规空间，且$A\subseteq X$是闭集，则任意连续函数$f:A\to\mathbb{R}$都可以扩张为连续函数$f:X\to\mathbb{R}$），结合紧Hausdorff空间都是正规空间，我们可以将s_i延拓为$\bar{s}_i\in\Gamma(E|_{\overline{U_i}})$。

我们现在再考虑$\bar{s}=\sum\limits_{i=1}^{l}\rho_i\cdot\bar{s}_i$，则对任意$y\in Y$，我们有

$$\bar{s}(y)=\sum_{i=1}^{l}\rho_i(y)\cdot\bar{s}_i(y)=\left(\sum_{i=1}^{l}\rho_i(y)\right)s(y)=s(y),$$

综上我们完成了延拓。□

定义: **（向量丛的拉回）**我们对$f:X\to Y$，$\pi:E\to Y$为向量丛，则定义

$$f^*E:=\{(x,e)\in X\times E|f(x)=\pi(e)\}.$$

其赋予子空间拓扑，我们现在简要验证一下其局部平凡性：考虑$f(x)$的邻域U使得$E|_U$平凡，通过φ同构于$U\times\mathbb{R}^k$，考虑$V=f^{-1}(U)$为x的开邻域，则有$f^*E|_V$平凡，这是因为我们有$\psi=(\mathrm{id},\pi_k\circ\varphi):f^*E|_V\to V\times\mathbb{R}^k$，给出了同胚，这里$\pi_k$表示$U\times\mathbb{R}^k$向$\mathbb{R}^k$的投影映射。

> 一个简单的性质是：对$X\xrightarrow{g}Y\xrightarrow{f}Z$，我们有$g^*(f^*E)=(f\circ g)^*E$，这是直接的。

> 因此我们可以定义$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$表示$X$上实向量丛在同构意义下的等价类（我们称$E, F\to X$同构如果存在保纤维的线性同胚）。这事实上给出了一个$\mathsf{Top}\to\mathsf{Set}$的一个反变函子。

定理：（同伦不变性）设X为紧Hausdorff空间，$f_0, f_1 : X\to Y$为一个由F给出的同伦，则我们对$E\to Y$为向量丛，有f_0^*E同构于f_1^*E。

Proof: 设$i_t : X\to X\times[0,1]$，$x\mapsto(x,t)$，从而我们有$f_0 = F\circ i_0$，$f_1 = F\circ i_1$，因此我们有

$$f_0^*E = i_0^*F^*E,\quad f_1^*E = i_1^*F^*E.$$

令$E' = F^*E$为$X\times[0,1]$上的向量丛，我们往证：$E'|_{X\times 0}$同构于$E'|_{X\times 1}$。

我们现在对$p : X\times[0,1]\to X$，构造$X\times[0,1]$上的丛$E_0 = p^*f_0^*E$，则容易看到对任意时刻t，$E_0|_{X\times t}$同构于f_0^*E。

考虑$X\times[0,1]$上的丛$\mathrm{Hom}(E', E_0)$。注意到对一个同构$s : E'|_{X\times a}\cong E_0|_{X\times a}$实际上给出了一个截面，也即我们可以把这个线性同构看成是

$$s\in\Gamma\left(\mathrm{Hom}(E', E_0)|_{X\times a}\right),$$

而$X\times a$是$X\times[0,1]$的一个闭子集，则由上述的截面延拓定理，我们有$\bar{s}\in\Gamma\left(\mathrm{Hom}(E', E_0)\right)$且$\bar{s}|_{X\times a} = s$，尽管在$a$时刻$\bar{s}$确实为同构，但并不代表整体是，因此这启发我们考虑如下集合

$$W = \{(x,t)\in X\times[0,1] : \bar{s}|_{\mathrm{Hom}(E',E_0)|_{(x,t)}}\text{为同构}\},$$

注意到同构事实上可转化为行列式不为0，这是开性质，因此可知W为开集，又$X\times a\subseteq W$紧，则由点集拓扑中的管状引理，存在$\varepsilon > 0$使得$X\times(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subseteq W$，从而我们再考虑集合

$$J = \{t\in[0,1] : E'|_{X\times t}\cong E_0|_{X\times 0}\},$$

由上一段论述则可知J为开集，显然为闭集，因为其补集表示那些与之不同构的向量丛，因为其可划分为向量丛等价类的并，而每个等价类都是开的，因此其也是开的，又$0\in J$，可知$J=[0,1]$，带入$t=1$我们便实现了目标。$\square$

K理论初探

对任意拓扑空间X，我们考虑其上全体实向量丛构成的全体，在同构意义下的等价类，记为

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)。$$

在其上可以自然定义出一个加法：也即向量丛的直和

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)\times\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X),\quad([E],[F])\mapsto[E\oplus F],$$

且显然零向量丛$\mathbb{R}^0$为单位元，结合律是显然的，从而我们有$(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X),\oplus)$为交换幺半群，进而我们借助一个代数上的操作，我们可以将其实现为Abel群：

> 设$(A,+)$为交换幺半群，则我们定义
>
> $$G(A,+) := A\times A/\sim,$$
>
> 其中$(a,b)\sim(c,d)$当且仅当存在$x\in A$，使得$a+d+x = b+c+x$，事实上这里我们形式上用(a,b)代替了我们心里想的$a-b$。这样的构造群的方式我们称为Grotendick群。
>
> 以从自然数$\mathbb{N}$构造$\mathbb{Z}$为例，我们实际上是考虑$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$，且$(a,b)\sim(c,d)$当且仅当$a+d=b+c$（因为我们心里想的是$a-b=c-d$等价的即$a+d=b+c$）。

> **注：**我们为什么要在定义中考虑$a+d+x=b+c+x$而不是直接让$a+d=b+c$呢？这是因为很多幺半群事实上并没有消去律，比如$(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(S^n),\oplus)$，我们有$TS^n\oplus\underline{\mathbb{R}}\cong\underline{\mathbb{R}^n}\oplus\underline{\mathbb{R}}$。

从而我们可以定义$\mathrm{KO}(X):=G(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X),\oplus)$，换言之我们定义$[E_1]-[E_2]=[E_1']-[E_2']$实际上是指存在$l\in\mathbb{N}$，使得$E_1\oplus E_2'\oplus\underline{\mathbb{R}^l}\cong E_1'\oplus E_2\oplus\underline{\mathbb{R}^l}$。

归根结底，为了更清楚理解$\mathrm{KO}(X)$上的形式减法，我们先证明如下命题：

命题：设X为紧Hausdorff空间，$E\to X$为向量丛，则存在向量丛$F\to X$使得$E\oplus F\cong\underline{\mathbb{R}^n}$。

Proof：注意到在上一节中我们已经通过对向量丛赋予黎曼度量，说明了对向量丛ξ及其任意子丛η，我们能构造处一个唯一的正交补向量丛$\eta^\perp$，且$\xi\cong\eta\oplus\eta^\perp$。因此为了说明$F$的存在性，我们只需要说明向量丛$E$可以嵌入到某个平凡丛中即可，而这个证明思路与弱Whitnety嵌入定理的证明思路类似，关键均是利用单位分解：

设$\{U_i\}_{1\leq i\leq l}$为E的一组局部平凡邻域，且定义

$$\varphi_i:E|_{U_i}\cong U_i\times\mathbb{R}^k\xrightarrow{\pi}\mathbb{R}^k.$$

设从属于$\{U_i\}$的单位分解为$\{\rho_i\}$，则显然对$\pi:E\to X$，我们有$\rho_i\circ\pi:E\to[0,1]$，且注意到虽然$\varphi_i:E|_{U_i}\to\mathbb{R}^k$为局部映射，我们可以借助$\rho_i\circ\pi$将其延拓，换言之为我们有

$$(\rho_i\circ\pi)\cdot\varphi_i:E\to\mathbb{R}^k,$$

注意这里$\cdot$表示数乘。

现在我们可以定义

$$\begin{aligned}E&\to\underline{\mathbb{R}^k\times\cdots\times\mathbb{R}^k=\mathbb{R}^{kl}}\\u&\mapsto(\pi(u),\rho_1\circ\pi(u)\cdot\varphi_1(u),\cdots,\rho_l\circ\pi(u)\cdot\varphi_l(u))\end{aligned},$$

不难看到这是一个逐纤维的线性单射，因此可知这给出了E在$\underline{\mathbb{R}^{kl}}$中的嵌入，综上我们完成了证明。$\square$

现在让我们重新审视$\mathrm{KO}(X)$中的减法，这本质上是一个等价类，我们下面的论述将表面，这个减法等价类总会有一个稍微好看的表达式：现在考虑$[E]-[F]$，注意到由上一命题，存在H使得$F\oplus H\cong\mathbb{R}^m$，进而由减法的等价类定义，以及$E\oplus F\oplus H=E\oplus H\oplus F$，可知

$$[E]-[F]=[E\oplus H]-[F\oplus H]=[E\oplus H]-[\underline{\mathbb{R}^m}].$$

因此我们有：

推论：对任何紧Hausdorff空间X，以及$\xi\in\mathrm{KO}(X)$，存在$E\in\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$以及$m\in\mathbb{N}$使得

$$\xi=[E]-[\underline{\mathbb{R}^m}].$$

推论：我们考虑一个自然映射$\alpha:\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)\to\mathrm{KO}(X)$，$[E]\mapsto([E],0)=[E]-0$，则我们有$\alpha(E)=\alpha(F)$当且仅当存在$l\in\mathbb{N}$，使得$E\oplus\underline{\mathbb{R}^l}\cong F\oplus\underline{\mathbb{R}^l}$。

Proof：后推前是显然的，因为我们找到了$x=\underline{\mathbb{R}^l}$使得$E\oplus0\oplus x=F\oplus0\oplus x$。我们现在考虑前推后，若两者相等，也即$[E]-0=[F]-0$，从而存在$[H]$使得$[E]\oplus[H]=[F]\oplus[H]$，又存在$[G]$使得$[G\oplus H]=[\underline{\mathbb{R}^l}]$，进而可得$[E\oplus\underline{\mathbb{R}^l}]=[F\oplus\underline{\mathbb{R}^l}]$，也即后者，综上我们完成了证明。$\square$

事实上，利用向量丛的张量积，我们可以给$\mathrm{KO}(X)$一个乘法结构，进而使得$KO(X)$成为一个交换环。

现在我们定义约化KO群：

定义：$\widetilde{\mathrm{KO}}(X):=\mathrm{KO}(X)/\{\pm[\underline{\mathbb{R}^l}]:l\in\mathbb{N}\}$。

> 某种程度上，$\widetilde{\mathrm{KO}}(X)$是$\mathrm{KO}(X)$模掉一个$\mathbb{Z}$，这和约化同调群是类似的。

我们借助下一命题给出一个更易于接受的约化KO群的定义：

命题：我们有

$$\widetilde{\mathrm{KO}}(X)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)/\sim,$$

其中$[E]\sim[F]$当且仅当存在$k,l\in\mathbb{N}$使得$E\oplus\underline{\mathbb{R}^k}\cong F\oplus\underline{\mathbb{R}^l}$。

> 熟知$TS^n\oplus\underline{\mathbb{R}}\cong\underline{\mathbb{R}^{n+1}}$，我们可知在$\widetilde{\mathrm{KO}}(S^n)$中，切丛$TS^n$就是零元。

Proof：注意到两个定义都可以看成是$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$上商掉了等价关系，因此我们只需要证明两个等价关系是一回事即可，注意到在原先定义中，$[E]\sim_1[F]$先等价于存在l使得$E\oplus\underline{\mathbb{R}^l}\cong F\oplus\underline{\mathbb{R}^l}$，再等价于有$s,t$使得$E\oplus\underline{\mathbb{R}^s}\cong F\oplus\underline{\mathbb{R}^t}$，因为在第二个等价中平凡丛都被视作零元，因此我们可以在两者分别加上$\underline{\mathbb{R}^t}$和$\underline{\mathbb{R}^s}$，划归为前一种等价关系。总之严谨的倒腾倒腾，便可以心安理得的接受这两个定义等价。□

向量丛的定向和$\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1)$的计算

例子：我们先说明任给一个S^1上的秩为k向量丛E，E可分解成$L\oplus\underline{\mathbb{R}^{k-1}}$。我们归纳的阐释这个事情，注意到视$E$为流形，$S^1$表示其零截面为其一个正则子流形，考虑截面$s:S^1\to E$，则可以作微小扰动使得$s$和$S^1$横截相交，若$s(S^1)\cap S^1\neq\varnothing$，则在交点$x$处，有

$$s_{*,x}T_xS^1+T_{s(x)}S^1=T_{s(x)}E,$$

而这不可能，因为后者维数大于等于3，左侧小于等于2，因此$s(S^1)$和S^1不交，也即s处处非零，从而可分裂出一个平凡线丛的因子。

因此我们知道任何一个S^1上的向量丛都稳定同构于一个线丛，而显然S^1上线丛只有两种，因此可知$\widetilde{\mathrm{KO}}(S^1)=\mathbb{Z}_2$。

第一次作业

Bonus Problem：证明$S^m\times S^n$可平行化当且仅当m,n中有一者为奇数。

Proof：右推左，不妨设m为奇数，则可知TS^m有一个非零截面，因此$TS^m\cong E\oplus\underline{\mathbb{R}}$，从而我们有

$$T(S^m\times S^n)\cong E\oplus\underline{\mathbb{R}}\oplus TS^n\cong E\oplus\underline{\mathbb{R}^{n+1}}\cong(E\oplus\underline{\mathbb{R}})\oplus\underline{\mathbb{R}^n}=TS^n\oplus\underline{\mathbb{R}^n}\cong\underline{\mathbb{R}^{m+n+1}}.$$

左推右，若切丛平凡，则其有一个处处非零的向量场，则由向量场的Hopf指标定理可知$\chi(M)=0$，而当m,n均为偶数时，我们有$\chi(S^m\times S^n)=\chi(S^m)\times\chi(S^n)=4\neq 0$，矛盾！□

(Milnor Problem 2A)

Proof：n为奇数时，显然有一个处处非零的切向量场$(x^2,-x^1,\cdots,x^{n+1},-x^n)$。$n$为偶数时，若有处处非零的切向量场$X$，不妨设其单位长（赋予一个黎曼度量的意义下），则考虑同伦映射

$$F:S^n\times[0,\pi]\to S^n,\quad F(p,t)=p\cos t+X_p\sin t,$$

其显然连续，因此给出了id和$-\mathrm{id}$的同伦，但两者映射度不同，矛盾！

注意到$n(x)=x$唯一个处处非零的截面，从而显然法丛是平凡丛。□

(Milnor Problem 2B)

Proof：显然。

(Milnor Problem 2E)

Proof：

(Milnor Problem 3C)

Proof:

(Milnor Problem 3D)

Proof: 选取E上的一个黎曼度量$g : E \times E \to \mathbb{R}$，考虑$g^\sharp : E \to \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R}) = E^*$，其中$g^\sharp(e)(f) := g(e, f)$，由$g$正定非退化，可以得出$g^\sharp$为同构。一方面容易看出$g^\sharp$为丛映射，且为单射，又两个向量丛的秩相等，因此可知$g^\sharp$为连续双射，容易构造出逆映射，因此可知是同构。

(Milnor Problem 3E)

Proof: 前一问是显然的；对后一问，若E上有黎曼度量，则我们有

$$E \otimes E \cong E^* \otimes E \cong \mathrm{Hom}(E, E) = \underline{\mathbb{R}}。$$

另一方面，若$E \otimes E \cong \underline{\mathbb{R}}$，则利用这个同构不难构造出一个黎曼度量。