Rieview of Dynamic System   Part A: [Ov]-动力系统

1. 离散动力系统：要点：紧致度量空间上的自同胚 f 生成的迭代 $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. (回复性)

① x 的轨道：$\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$；正半轨 $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}$，$\{f^{-n}(x)\}_{n\geq 0}\to$ 负半轨.

② x 称为周期点：$\exists n\geq 1$. $f^n(x)=x$. 最小的 n 称为 x 的周期

$\longrightarrow$ 集合记为 $Per(f)$. 不动点集记为 $Fix(f)$.

③ x 称为正向回复点：对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists n$. s.t. $d(f^n(x),x)<\varepsilon$. 同理可定义

负向回复点. $\longrightarrow$ 集合记为 $Rec(f)$ 正半轨回到 x 自身 $\Leftrightarrow \varliminf\limits_{n\to+\infty} d(f^nx,x)=0$.

④ x 称为非游荡点：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n>0$. $\exists y$. s.t. $d(y,x)<\varepsilon$. 且 $d(f^ny,x)<\varepsilon$.

换言之 x 的任意邻域，总会与某些轨道相交至少两次以上.

$\longrightarrow$ 记为 $\Omega(f)$.

⑤ x 称为链回复点：对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists n>0$ 以及 $y_0,y_1,\cdots y_n$ 使得 $y_0=x=y_n$,

且 $d(f(y_i),y_{i+1})<\varepsilon$. (每一步都允许 ε 误差) $\longrightarrow$ 记为 $CR(f)$.

$\boxed{\text{Question:}}$ 为什么 $\Omega(f)\subseteq CR(f)$??

3. 称 y 是 x 的正向极限点. 若存在 $n_i\to+\infty$. 使得 $f^{n_i}(x)\to y$, $\rightsquigarrow$ 记为 $\omega(x)$.

4. $\Lambda\subseteq M$ 称为不变集，若 $f(\Lambda)=\Lambda$.

5. (拓扑共轭). $f: M\to M$. $g: N\to N$ 为两个系统. 若有同胚 $h: M\to N$. s.t.

$h\circ f=g\circ h$. 即 $f=h^{-1}gh$. 则称两个同胚 彼此间拓扑共轭.

6. M 为紧致无边 C^∞ Riemann 流形. $f,g\in Diff^r(M)$. 定义

$$d_{C^r}(f,g):=\max_{0\leq s\leq r}\ \sup_{x\in M}|D^sf(x)-D^sg(x)|$$

为两个同胚之间的 C^r 距离. 用局部坐标theory理解.

7. 称 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是 C^r 结构稳定的，若 $\exists\, \varepsilon>0$, s.t. 对 $\forall\, g\in \mathrm{Diff}^r(M)$，若 $d_{C^r}(f,g)<\varepsilon$，则有 g 与 f 拓扑共轭.

(Fact: C^r 结构稳定 $\Rightarrow$ C^{r+1} 结构稳定).

8. 对 $f\in \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$，有如下基本定义与事实:

① f 保向，从而 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 且 f 严格单调. 从而 $\mathrm{Fix}(f)=\mathrm{Per}(f)=\mathrm{Rec}(f)$ $=\Omega(f)=CR(f)$.

② 称不动点 x 为双曲的，若 $f'(x)\neq 1$. $\begin{cases} f(p)=p,\ f'(p)<1，则\ p\ 为吸引的. \\ f(q)=q,\ f'(q)>1，则\ q\ 为排斥的. \end{cases}$

9. (Thm) 若 p 是 $f\in \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ 的一个双曲不动点，则 $\exists\, \varepsilon>0, \delta>0$ s.t. $\forall\, g\in \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ 且 $d_{C^1}(f,g)=\sup\limits_{[0,1]}\left(|f(x)-g(x)|+|f'(x)-g'(x)|\right)<\varepsilon$，则 g 在 $[p-\delta, p+\delta]$ 中有唯一不动点. $\longrightarrow$ 双曲不动点在 C^1 扰动下是保持的.

(sketch: $\begin{cases} 存在性：介值定理. \\ 唯一性：\text{Lagrange}\ 中值\ 推导 \end{cases}$ P13 of note).

10. (Thm) 若 $f\in \mathrm{Diff}^1([0,1])$，所有不动点均双曲，则有 f 是 C^1 结构稳定的

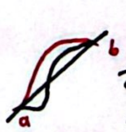
(sketch {
- f all fixed points hyperbolic $\Rightarrow$ 不动点有限.
- 区间内部无不动点的同胚拓扑共轭.
- 综合上述两点以及 9，进行分段构造!

).

11. (Thm) $f\in \mathrm{Diff}^r_+([0,1])$，$\forall\, r\geq 1$，则有

f 是 C^r 结构稳定的 $\Longleftrightarrow$ f 的不动点均双曲 !!

直观：若否.



扰动成 3个不动点!!

(sketch: ($\Leftarrow$) 由10可得.

($\Rightarrow$) $\boxed{\text{Fact 1}}$: 若 $f\in \mathrm{Diff}^r([a,b])$, $\mathrm{Fix}(f)=\{a,b\}$. 若 f C^r 结构稳定 $\Rightarrow$ a,b 均为双曲不动点

$\boxed{\text{Fact 2}}$: 若 f C^r 结构稳定，则只有有限个不动点 ↙ 用多项式逼近.

Rieview of Dynamic System　Part B: S^1-动力系统

1. 对 $f: S^1 \to S^1$. 若有 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 对 $p: \mathbb{R} \to S^1$ 满足 $f \circ p = p \circ F$. 则称 F 为 f 的提升.

2. (Thm & def). 我们对 f 的提升 F, 有 $F(x+1) - F(x) = k \in \mathbb{Z}$ 且 k 与 x 选取无关, 也与提升 F 无关. 称为 f 的映射度.

3. $f: S^1 \to S^1$ 连续可微 (记 $f'(z) := F'(z)$, F 为 f 提升) 称 z 为一个双曲周期点.
若有 n. $f^n(z) = z$. 且 $|(f^n)'(z)| \neq 1$.

4. 类似于 $[0,1]$ 区间. 对于圆周映射也有:

(Thm) $f: S^1 \to S^1$ 为 C^r 微分同胚. 则:

$$\boxed{f \text{是} C^r \text{结构稳定的} \iff f \text{有周期点且所有周期点均为双曲的}}$$

(sketch: ($\Leftarrow$) · 证明所有周期点同周期 (文兰 定理 1.11).

· 证明 f^n 作用后是不动点. → 按不动点剖开, 仿照 $[0,1]$ 的做法.

($\Rightarrow$) 文兰 P19 习题 18.)

5. 压缩映射原理 构造拓扑共轭:

(Thm) $\boxed{f(z) = z^m.\ |m| > 1 \text{ 是 } C^1 \text{ 结构稳定的.}}$ ← 学习压缩映射的技术!!

(sketch: $\forall g$ 与 f C^1 近, 找 $h \in \mathrm{Diff}(S^1)$. 有 $hf = gh$ → 考虑提升. 对 $F(x) = mx$.
找 $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 同胚, $H \circ F = G \circ H$.

· g 与 f C^1 近则 $\deg g = \deg f = m$. ⇒ $G - F$ 为 1 周期 记为 φ. $\gamma = H - id$ 也为 1 周期
→ 改为 $(\gamma + id) \circ F = (F + \varphi) \circ (\gamma + id)$ ⇒ $\gamma(mx) + mx = (F+\varphi)(\gamma(x) + x)$
$= m\gamma(x) + mx + \varphi(\gamma(x) + x)$ ⇒ $\gamma(x) = \frac{1}{m}\left(\varphi(\gamma(x) + x) - \gamma(mx)\right)$

令 $T(\gamma)(x) = \frac{1}{m}\left(\varphi(\gamma(x)+x) - \gamma(mx)\right)$. 取 $X = \{\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \alpha$ 为连续
1 周期函数 $\}$. $d(\alpha, \beta) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha(x) - \beta(x)| = \max_{x \in [0,1]} |\alpha(x) - \beta(x)|$. → 完备空间

· check: $\alpha \in X \Rightarrow T\alpha \in X$ (显然成立)　　Lecture 05 NOTE.

· 证明 $d(T\alpha, T\beta) < \lambda\, d(\alpha, \beta)$. $\lambda < 1$.)

6. (扩张映射).

$f: S^1\to S^1$ 为 C^1 的. 设 F 为 f 的一个提升. 若对 $\forall x\in\mathbb{R}$. 有 $|F'(x)|>1$. 则称 f 为扩张映射.

(Easy Fact: f 扩张映射. 则 $|\deg f| = |F(x+1)-F(x)| = |F'(\xi)|>1$).

7. (Shub thm)

$f.g: S^1\to S^1$ 为 C^1 扩张映射. 若 $\deg f=\deg g \Rightarrow f\ \text{与}\ g$ 拓扑共轭

Sketch: $\boxed{\text{step 1}}$ f 为扩张映射 $\Rightarrow |F'|>1 \Rightarrow F$ 单调 $\Rightarrow$ 可证 F 为同胚.

$\boxed{\text{step 2}}$ 构造 $H: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为同胚. 且 $H(x+1)=H(x)+1$. &

$H\circ F = G\circ H.$ ⟶ 由 $G.F$ 可逆知 $H = G^{-1}\circ H\circ F.$

考虑 $\Upsilon=\{H\in C^1(\mathbb{R}) \mid H(x+1)=H(x)+1\}$ $T(H) = G^{-1}\circ H\circ F.$

check-1: $T(H)(x+1) = G^{-1}\circ H\circ F(x+1) = G^{-1}\circ H(F(x)+d)$

$= G^{-1}(H(F(x))+d) = G^{-1}\circ H\circ F(x) + 1 \Rightarrow T(H)\in\Upsilon.$

check-2: 验证压缩映射: $d_\Upsilon(T(H_1)-T(H_2)) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |G^{-1}\circ H_1\circ F(x) - G^{-1}\circ H_2\circ F(x)|$

$\le \sup|(G^{-1})'| \cdot \sup|H_1\circ F(x)-H_2\circ F(x)|$

$\overset{\text{扩张映射}}{\le} \frac{1}{1+\delta}\cdot\sup|H_1(F(x))-H_2(F(x))| = \frac{1}{1+\delta}d_\Upsilon(H_1.H_2).$

⟶ 存在唯一 H.

$\boxed{\text{step 3}}$ 验证 H 为同胚. 考虑 $H' = G\circ H'\circ F^{-1}$ ⟶ 同理 · · ·.

□

8. S^1 上扩张映射均 C^1 结构稳定.

- $d_{C^1}(f.g)<\frac{1}{2} \Rightarrow \deg f = \deg g$
- 由 Schub. 立得即可.

「Rmk: 与说 z^m. $|m|>1$ 为 C^1 结构稳定. 由 z^m 也为扩张映射 $\Rightarrow$ 8 为 5 之推广」

Review of Dynamic System　Part C：符号动力系统.　⑤

1. 对符号集 $K=\{0,1,\cdots,k-1\}$，定义符号空间 $\Sigma_k^+ = K^{\mathbb{N}} = \{(a_0 a_1 \cdots) \mid a_i \in K\}$.

如 $\Sigma_2^+ = \{(a_0 a_1 a_2 \cdots) \mid a_i \in \{0,1\}\}$. 也即为个单边字符串.

2. $\alpha,\beta \in \Sigma_2^+$，可以定义其上度量 d:

$$d(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i-b_i|}{100^i} \quad \text{or} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i-b_i|}{2^i}$$

使之成为度量空间.

3. $[b_0 \cdots b_N] = \{\alpha=(a_0 a_1 \cdots) \in \Sigma_2^+ \mid a_i = b_i,\ i=0,\cdots,N\}$.

Fact: $[b_0 \cdots b_N]$ 既开又闭，且完备（即无孤立点闭集）.

(Sketch: 开: $\forall \alpha \in [b_0,\cdots b_N]$ 则有 $B_{\frac{1}{100^{N+2023}}}(\alpha) \subseteq [b_0,\cdots b_N]$

闭: $\forall \alpha \notin [b_0,\cdots b_N]$. $\exists i$. $a_i \neq b_i$. $0 \le i \le N$. 则有 $B_{\frac{1}{100^{i+2023}}}(\alpha)$

$\notin [b_0 \cdots b_N]$　用到了一個 $d(\alpha,\beta) < 100^{-k}$. 则 $a_i = b_i$. $0 \le i \le k$.

完备: 若有孤立点则 S 开矛盾!).

4. $\sigma: \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$　$\sigma((a_0 a_1 a_2 \cdots)) = (a_1 a_2 \cdots)$. 显然 σ 为同胚，称

(Σ_2^+, σ) 为一个单边符号动力系统.

5. ① $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma_2^+$ 即周期轨稠密.

$\forall \alpha \in \Sigma_2^+$. $\varepsilon > 0$. 有 N. $100^{-N} < \varepsilon$. 对 $\beta = (a_0,\cdots a_{N+2023}, a_0 \cdots, a_{N+2023} \cdots)$

$\in Per(\sigma)$. 且有 $d(\alpha,\beta) < \varepsilon$. ⇝ 从而周期点稠密.

② Σ_2^+ ~~极小~~ 存在 $x \in \Sigma_2^+$. 有 $\overline{orb(x)} = \Sigma_2^+$

(注意极小是指 $\forall x$. 轨道闭包为全集!!)

将各序列按字典序排成一列 $\alpha=(0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,\cdots)$. 则考虑 α.

$\forall \beta=(b_0 b_1 \cdots)$. $\varepsilon>0$. $\exists N$. $10^{-N}<\varepsilon$. 则有 $\tilde{N}$. $\sigma^{\tilde{N}}(\alpha)=(\underline{b_0\cdots b_N}\cdots)$

从而 $d(\sigma^{\tilde{N}}(\alpha),\beta)<\varepsilon$. $\Rightarrow \overline{orb(\alpha)}=\Sigma_2^+$.

③ $\forall n\in\mathbb{N}$. 存在最小正周期为 n 的周期点.

6. 可以证明: 虫口模型 $[0,1]\to[0,1]$. $f(x)=\lambda x(1-x)$ 与符号动力系统拓扑共轭. 其中拓扑共轭构造是利用行程序列. $h:\Lambda\to\Sigma_2^+$ （$\Lambda\to\Lambda$. $\Leftrightarrow \Lambda=\{x\mid f^n x\in[0,1],\ \forall n\}$.）

$$x\longmapsto \alpha=(a_0 a_1 a_2\cdots). \text{ 满足 } f^n x\in I_{a_n}.$$

(Page 31).

7. 可以证明: Smale 马蹄与双边符号动力系统 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 拓扑共轭. 同样是构造行程序列.

---

8. $f: T^2\to T^2$ 连续. f 的提升 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 有

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d] \\ T^2 \arrow[r, "f"] & T^2 \end{tikzcd}$$

Fact: ① $f:T^2\to T^2$ 连续. F 为提升. 则 $F+\binom{m}{n}$ 是所有的提升.

② 类似 $S^1\to S^1$ 可定义 $f,g:T^2\to T^2$ 的 C^r 距离.(利用提升)

9. (Thm) Anosov 线性同构: $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ 是 C^1 结构稳定的

(sketch: 仍然是用压缩映射构造. 见 [illegible] of Note.)

10. $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}: T^2\to T^2$ 周期点在 T^2 上稠密.

证: 利用抽屉原理 证明 $\forall\left(\frac{q}{p},\frac{s}{r}\right)$. $p,q,r,s\in\mathbb{N}$, $q<p$, $s<r$. 为周期点 $\longleftarrow$ 模 p 看!!

Rieview of Dynamic System   Rieview of Part D: 双曲动力系统.

1. 称线性同构 $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 为双曲的，若存在 $\mathbb{R}^d$ 的直和分解

$$\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u.$$

且满足① $A(E^s)=E^s$, $A(E^u)=E^u$

② ∃常数 $0<\lambda<1$, $C\ge 1$, s.t.

$$|A^n v|\le C\lambda^n|v|,\ \forall v\in E^s,\ \forall n\ge 0$$

$$|A^{-n}v|\le C\lambda^n|v|,\ \forall v\in E^u,\ \forall n\ge 0.$$

称 E^s 为压缩子空间, E^u 为扩张子空间.

2. (E^s 的等价刻画)

① $E^s=\{v\in\mathbb{R}^d \mid A^n v\to 0,\ n\to+\infty\}$ ②

$=\{v\in\mathbb{R}^d \mid \exists r,\ \forall n\ge 0,\ 有 |A^n v|\le r\}$ ③

v^u 表示在 E^u 上的分量. 同理 v^s.

$=\{\exists r>0,\ \forall n\ge 0,\ 有 |(A^n v)^u| / |(A^n v)^s|\le r\}$ ④

Pf: ① $\le$ ② 显然. ② $\le$ ③ 显然.

③ $\le$ ④ 反证法 若有 $v\in$④ 但 $v\notin$③. 从而 $\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{|(A^n v)^u|}{|(A^n v)^s|}=+\infty$.

与④矛盾.

3. 设 $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 为双曲线性同构. 则 ∃范数 $\|\cdot\|$, $0<\tau<1$, s.t.

$$\|Av\|\le\tau\|v\|,\quad \forall v\in E^s$$

$$\|A^{-1}v\|\le\tau\|v\|,\quad \forall v\in E^u$$

τ 称为 A 的双曲率, $\|\cdot\|$ 称为适配范数.

Sketch: 定义 $\|v\|=\sum_{n=0}^{N-1}|Av|$. 这里 $C\lambda^N<1$.

4. $\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|$. $m(A) = \inf_{|v|=1} |Av| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. ⑧

5. 设 $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为双曲线性同构, $\phi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lip. 则 若 $\mathrm{Lip}(\phi) < m(A)$,

则 $A+\phi$ 为同胚, 且 $\mathrm{Lip}((A+\phi)^{-1}) \le \frac{1}{m(A) - \mathrm{Lip}\phi}$

证: $\forall z \in \mathbb{R}^d$. Goal: 求 $x \in \mathbb{R}^d$. $(A+\phi)x = z \Rightarrow Ax + \phi(x) = z$.

$\Rightarrow x = A^{-1}z - A^{-1}\phi(x)$. $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. $T(x) = A^{-1}z - A^{-1}\phi(x)$.

从而 $|T(x) - T(y)| = |A^{-1}\phi(x) - A^{-1}\phi(y)| = |A^{-1}(\phi(x) - \phi(y))| \le \frac{\mathrm{Lip}\phi}{m(A)} |x-y|$

由压缩映射 $\exists!\, x$.

$\Rightarrow |(A+\phi)(x) - (A+\phi)y| = |Ax - Ay + \phi x - \phi y| \ge (m(A) - \mathrm{Lip}\,\phi)|x-y|$.

$\Rightarrow \mathrm{Lip}((A+\phi)^{-1}) \le \frac{1}{m(A) - \mathrm{Lip}\phi}$.

6. (Def). $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为 C^1-diffeomorphism, $f(p) = p$. 称 p 为 f 的 双曲不动点.

若 f_{*p} 是 $T_p\mathbb{R}^d$ 上的 双曲线性同构.

· 称 p 为 f 的 双曲周期点. 若 $\exists n$. p 为 f^n 的 双曲不动点.

7. (Pugh Lemma) 双曲线性同构在 Lip 扰动下结构稳定.

设 $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为双曲线性同构, 在与其适配的金型范数下 1.1 的双曲值

为 $0 < \tau < 1$. 设 $\phi, \psi \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ (有界连续函数), 且

$$\max\{\mathrm{Lip}\,\phi, \mathrm{Lip}\,\psi\} < \min\{1-\tau, m(A)\}.$$

则存在唯一 $\eta \in C_b^0(E)$. s.t. $id + \eta$ 为同胚且

$$(id+\eta)(A+\phi) = (A+\psi)(id+\eta).$$

pf 见文三 P41 关键仍是构造压缩映射.

8.(Hartman-Grobman) 双曲不动点附近，f 与其切映射动力系统性态相同.

设 $p\in\Omega$ 为 f 的双曲不动点，则存在 p 的邻域 U 及到像同胚 $h: U\cup f(U)\to\mathbb{R}^d$.

使 $h\circ f|_U = Df(p)\circ h|_U$.

(pf 见 文三 P43).

9.(稳定流形定理)

10. $r>0$. 定义

$$W^s_r(p)=\{x \mid d(f^n x, p)\le r,\ \forall n\ge 0.\ \lim_{n\to\infty} f^n x=p\}$$

为局部稳定集. 记及

$$W^u_r(p)=\{x \mid d(f^n x, p)\le r.\ \forall n\ge 0.\ \lim_{n\to+\infty} f^{-n}x=p\}.$$

为局部不稳定集.

11. 稳定集 $W^s(p)=\{x \mid \lim_{n\to\infty} f^n x=p\}$.

不稳定集 $W^u(p)=\{x \mid \lim_{n\to\infty} f^{-n}x=p\}$.

Fact: $W^s(p)=\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W^s_r(p))$.

动力系统与论复习 Part E — 圆周映射.

§ 1 无理旋转.

1° $\alpha\in\mathbb{Q}$. $\alpha=\frac{p}{q}$. 则对 $R_\alpha: S^1\to S^1$. $[0,1]/\sim\to[0,1]/\sim$. $x\mapsto x+\alpha$.

有 q 周期轨. (平凡)

2° $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 也即任意点的轨道稠密.

$\boxed{\text{Prop 1}}$ (S^1, R_α) 极小. (回忆 动力系统 (X,T) 极小 若 $\forall x$. $\overline{\{T^n x\}}=X$)

Proof: 熟知 $\{n\alpha\}$. $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 上稠密. 从而利佳有 $\{x+n\alpha\}$ 也稠密.

进而可知 命题成立.

$\boxed{\text{Prop 2}}$ (S^1, R_α) 唯一遍历. $\longrightarrow$ i.e. $\forall f\in C(S^1,\mathbb{R})$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x+k\alpha)=\int f\,dm$

Proof: 我们先证明对 $f(x)=e^{ikx}$. $k\in\mathbb{Z}$. 命题成立. 事实上此时

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x+k\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}e^{ik(x+l\alpha)}=\frac{1}{n}e^{ikx}\sum_{l=0}^{n-1}e^{ikl\alpha}$$

$$=\frac{1}{n}e^{ikx}\frac{1-e^{ik(n-1)\alpha}}{1-e^{ik\alpha}}\xrightarrow{n\to\infty}0.\quad 而\int_0^1 e^{ikx}dx=0.$$

再对 $\forall f\in C(S^1,\mathbb{R})$. 作 Fourier 展开. $f=\sum\hat{f}(n)e^{inx}$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x+k\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(m)e^{im(x+k\alpha)}=\frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(m)\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{im(x+k\alpha)}\right)$$

$\longrightarrow\hat{f}(0)$ 当 $n\to\infty$. 又有 $\int_0^1 f(x)dx=\hat{f}(0)$. $\Rightarrow$ 得证.

□.

$\boxed{\text{Corollary 3}}$ (等分布). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_I(x+k\alpha)=|I|$

§2 旋转数.

$\boxed{\text{Def 1}}$ 设 $f\in \mathrm{Homeo}^+(S^1)$，$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 f 之提升. 则 $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\rho(F):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(F^n(x)-x)$$

存在. 且与 x 选取无关. 且 $\rho(f):=\rho(F) \bmod \mathbb{Z}$. 与 F 提升选取无关. 称为 f 的旋转数.

Proof: $\boxed{\text{step 1}}$ 与 x 选取无关. 任取 $x,y\in[0,1]$. 从而有 $|x-y|\le 1$. 因而 $x<y<x+1$. 由 $f\in\mathrm{Homeo}^+$ $\Rightarrow$ F 单↑ $\Rightarrow F(x)<F(y)<F(x)+1$

$\Rightarrow \forall n.\ |F^n(x)-F^n(y)|\le 1 \Rightarrow \left|\frac{F^n(x)-x}{n}-\frac{F^n(y)-y}{n}\right|\le\frac{2}{n}\to 0.$

$\boxed{\text{step 2}}$ 极限存在. 设 $a_n(x)=F^n(x)-x$. 从而有

$$a_{n+m}(x)=F^{n+m}(x)-x=(F^m(F^n(x))-F^n(x))+(F^n(x)-x)$$
$$=a_m(F^n(x))+a_n(x)$$

令 $M_n=\sup\limits_{x} a_n(x) \Rightarrow M_{m+n}\le M_m+M_n$. 从而易知有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}$ 存在. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup\limits_{x}(F^n(x)-x)$ 存在. 从而由设 $M_n=a_n(x_n)$ (因为 S^1 紧) 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n(x_n)+\frac{1}{n}(a_n(x)-a_n(x_n))$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n(x_n)+\frac{2}{n}\Rightarrow \text{存在!}$$

$\boxed{\text{step 3}}$ 不依赖于提升选取. 若 $\tilde F$ 为 f 提升. 则 $\tilde F(x)=F(x)+l$. 从而

$\tilde F^2(x)=\tilde F(F(x)+l)=F^2(x)+2l. \Rightarrow \tilde F^n(x)=F^n(x)+nl.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\tilde F^n(x)-x)=\rho(F)+l. \Rightarrow \rho(f)\ \text{固定}.$$

□

$\boxed{\text{Prop2}}$: $\rho(f)$ 为一个共轭不变量. i.e. $\forall\ h\in H^+(S^1)$. 则 $\rho(h\circ f\circ h^{-1})=\rho(f)$.

Proof: 设 h 之提升 H. 则 $h\circ f\circ h^{-1}$ 有提升 $H\circ F\circ H^{-1}$. 从而有 $(H\circ F\circ H^{-1})^n$

$$=H\circ F^n\circ H^{-1} \Rightarrow \rho(\tilde f)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(H\circ F^n\circ H^{-1}(x)-x\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(H\circ F^n(y)-H(y)\right)$$ 同胚 公式!

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{H\circ F^n(y)-F^n(y)}{n}+\frac{F^n(y)-y}{n}+\frac{y-H(y)}{n}\right)$$ (note that $\overset{H(x+1)-(x+1)=H(x)-x}{H(x)-x}$ is bounded!)

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(y)-y}{n}=\rho(f).$$ (利用 $H(y)-y$ 有界). □

$\boxed{\text{Prop3}}$: $\rho(f)$ 在 C^0 拓扑下连续. (需要 Prop4 预备)

$\boxed{\text{Prop4}}$: 若 f 有周期轨 则 $\rho(f)$ 为有理数.

Proof: 我们证明更强的结果. $\rho(f)=\frac{p}{q} \Leftrightarrow \exists x.\ F^q(x)=x+p$.

($\Leftarrow$) 若 $F^q(x)=x+p$. 从而 $\forall n=kq$. 有 $F^n(x)=F^{kq}(x)$

$$=F^{(k-1)q}(F^q(x))=F^{(k-1)q}(x+p)=x+kp$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\frac{F^{kq}(x)-x}{n}=\lim_{k\to+\infty}\frac{kp}{kq}=\boxed{\frac{p}{q}}.$$

($\Rightarrow$) 反证法. 若 $\forall x.\ F^q(x)\neq x+p$. 不妨设 $\exists\varepsilon>0.\ F^q(x)\geq x+p+\varepsilon$.

$\forall x \Rightarrow F^q(x)-x-p\geq\varepsilon>0.\quad F^{2q}(x)-F^q(x)-p\geq\varepsilon>0$

$\cdots \Rightarrow F^{nq}(x)-x-np\geq n\varepsilon>0 \Rightarrow \frac{F^{nq}(x)-x}{nq}-\frac{p}{q}\geq\frac{\varepsilon}{q}>0$

$\Rightarrow \rho(f)-\frac{p}{q}\geq\frac{\varepsilon}{q}$. 矛盾! $\Rightarrow$ F 有 q 周期轨. □

以上即证.

Proof of Prop 3 我们只需证明 $(-\infty, \frac{q}{p})$ 与 $(\frac{q}{p}, +\infty)$ 的原像均为开集即可.

我们以 $(\frac{q}{p}, +\infty)$ 为例. $\forall f$ 有 $\rho(f) > \frac{p}{q}$. 从而易知 $\exists \varepsilon > 0$. $\forall x \in S^1$.

$F^q(x) - x - p \geq \varepsilon > 0$. 由而 对 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. 与 $\|f-g\|_{C^0} \leq \delta$. 即 $\sup_{x\in S^1} |f(x)-g(x)| \leq \delta$

考虑 g 的提升 G. 则有 $|G^q(x) - F^q(x)| \leq \delta \Rightarrow |G^q(x)-x-p - F^q(x)-x-p| \leq \delta < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow G^q(x) - x - p \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow \rho(g) > \frac{p}{q}$. $\Rightarrow \exists f$ 的邻域在 $(\frac{p}{q}, +\infty)$ 中. 均为 C^0 拓扑的开集. □

§3 KAM 理论.

首先给出 Poincaré 分类定理.

$\boxed{\text{Thm 1}}$ (Poincaré 分类定理)

$f \in H^+(S^1)$. $\rho(f) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 则 $\exists$ 半共轭 $h: S^1 \to S^1$. i.e. 连续. 满射. 保序. 度为 1. s.t. $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$.

$\boxed{\text{Rmk}}$ 即 对 f 与 $\rho(f)$ 不作任何限制. 只能做到 f 与 $R_{\rho(f)}$ $\boxed{\text{半共轭}}$

那么提高 f 的要求, 就能做到更好!

$\boxed{\text{Thm 2}}$ (Denjoy 定理)

$f \in \mathrm{Diff}^+(S^1)$, $\log Df \in BV$. $\rho(f) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\exists\, h \in H^+(S^1)$. s.t. $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$.

1. I 称为 f 的游荡集若有 $f^n(I)\cap f^l(I)=\phi$. $\forall n\neq l$.

2. 下列命题等价: 对 $f: S^1\to S^1$. $\rho(f)\notin \mathbb{Q}$, 则

1) f 没有游荡区间

2) f 传递. 即 $\exists x$. $\overline{\{f^n x\}}=S^1$, 也即存在稠密轨

3) f 极小. 即 $\forall x$. $\overline{\{f^n x\}}=S^1$. 也即每个点轨道均稠密

4) $f\overset{h}{\sim} R_{\rho(f)}$. 也即 f 与 $R_{\rho(f)}$ 拓扑共轭

5) $\operatorname{supp}\mu=S^1$. μ 为 f-不变测度.

Pf: 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1)

[2) $\Rightarrow$ 1). 反证法. 若有, 则必为开集 I. 从而有 $y=f^m x\in I$. 则有 $f^k(y)\in f^k(I)$.

$\Rightarrow orb(y)\subseteq \bigcup f^n(I)\subseteq S^1$ 又 $\overline{orb(y)}=S^1$

则有 $\bigcup f^n(I)=S^1$. $\rightarrow$ 有限开覆盖!].

1) $\Rightarrow$ 4). 由 Poincaré 分类定理. 存在半共轭. h. 又命 h 单射. 否则 $z_1<z_2$

$h(z_1)=h(z_2)=z^*$. $\Rightarrow h\circ f^k(z)=R_{k\alpha}\circ h(z)$. 又 $I=[z_1,z_2]$. $h(I)=[h(z_1),h(z_2)]$

$\Longrightarrow h\circ f^k(I)=h(I)+k\alpha=\{z^*+k\alpha\}\neq z^*\mod \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ $\forall k$. $f^k(I)\cap I=\phi$ X. □

3. (Denjoy-Koksma 引理)

$\forall f\in H^+(S^1)$, $\rho(f)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall\varphi\in BV(S^1)$, $|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^2}$. 从而有

$$\left|\sum_{k=0}^{q-1}\varphi\circ f^k-q\int\varphi\, d\mu\right|\le \operatorname{Var}\varphi.$$

$\boxed{\text{记忆}}$

Pf: 由 Poincaré 分类定理. 存在半共轭 $h: S^1\to S^1$ 满足 $h\circ f=R_\alpha\circ h$. $\Rightarrow h\underline{f^k(z)}=h(z)+k\alpha$

由 h 为满射. 从而 $\exists$ z_k, z_{k+1}. $h(z_k)=\cancel{h(z)+k\alpha}\ \frac{i_k}{q}$. $h(z_{k+1})=\cancel{h(z)+(k+1)\alpha}\ \frac{i_{k+1}}{q}$ $I_k=[z_k,z_{k+1}]$

s.t. $h(z)+k\alpha$ 恰落在 $[\frac{i_k}{q},\frac{i_{k+1}}{q}]$ 中

从而 $\left|\sum_{k=0}^{q-1}\varphi\circ f^k(z)-q\int\varphi\, d\mu\right|\le q\left|\sum_{k=0}^{q-1}\int_{I_k}\varphi\circ f^k(z)-\varphi(x)\,d\mu\right|$ $\left[\int_{z_k}^{z_{k+1}}d\mu=h(z_{k+1})-h(z_k)=\frac{1}{q}.\right.$

(利用 $\int_{I_k}d\mu=h(z_{k+1})-h(z_k)=\frac{1}{q}$) $\le q\sum_{k=0}^{q-1}\operatorname{Var}_{I_k}\varphi\cdot\int_{I_k}d\mu\le \operatorname{Var}_{S^1}\varphi$. □

(关键在于分段)

4. Diophantine 条件: $\tau>1$. $|e^{2\pi i k\alpha}-1| \geq \frac{r}{|k|^\tau}$. $\forall\, k\neq 0$.

满足这样关系α全体记为 $DC(r,\tau)$.

5. Fact: 满足 Diophantine 条件的 α 几乎处处都是. i.e. 给定 $\tau>1$.

$$m\Big(\bigcup_{r>0} DC(r,\tau)\Big)=1.$$

Sketch: 先证明 $m(DC(r,\tau)) = 1-O(r)$. 注意到 $(DC(r,\tau))^c \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\alpha \mid |e^{2\pi i k\alpha}-1| < \frac{r}{|k|^\tau}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\alpha \mid -\frac{r}{2|k|^\tau} \leq \sin k\pi\alpha \leq \frac{r}{2|k|^\tau}\}$

对 k. $-\frac{r}{2|k|^\tau} \leq \sin k\pi\alpha \leq \frac{r}{2|k|^\tau}$ 在 $(0,1)$ 中的长度大约为 $C\arcsin\frac{r}{2|k|^\tau}$

所以 $m\big((DC(r,\tau))^c\big) \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\arcsin\frac{r}{|k|^\tau} \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{|k|^\tau} = O(r)$.

$\Rightarrow m(DC(r,\tau)) = 1-O(r)$. 由此得证. □

6. 考虑 $x \xmapsto{f} x+\alpha+\varphi(x)$. 若有 $\rho(f)=\alpha$ 则 $\exists\, x_0$. $\varphi(x_0)=0$.

Proof: 回忆 旋转数的定义. 对 f 的提升 F. 有 $\rho(f) := \lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)-x}{n} = \alpha$.

则有 对 $F(x) = x+\alpha+\varphi(x)$. $F\circ F(x) = F(x+\alpha+\varphi(x)) = x+\alpha+\varphi(x)+\alpha+\varphi(x+\alpha+\varphi(x))$

$= x+2\alpha+\varphi(x)+\varphi(F(x))$. $\Rightarrow F^3(x) = x+2\alpha+\varphi(x)+\varphi(F(x))+\alpha+\varphi(F^2(x))$

$\Rightarrow F^n(x) = x+n\alpha+\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ F^j(x)$. $\Rightarrow$ 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ F^j(x) = 0$.

若 $\forall x_0$. $\varphi(x_0)\neq 0$. 从而 不妨设 φ 有 正的下界 $m>0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ F^j(x) \geq m > 0$ 矛盾! □

7. (Arnold) 若 $\varphi\in C^\omega_\rho(S^1,\mathbb{R})$, $\rho(f)=\alpha\in DC(r,\tau)$. $f(x)=x+\alpha+\varphi(x)$, 则 $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(r,\tau,\rho)$. s.t. 若 $\|\varphi\|_\rho<\varepsilon$. 则 $\exists\, h\in C^\omega_{\frac{\rho}{2}}(S^1,S^1)$ 且可逆. s.t. $h\circ f = R_\alpha\circ h$.

8. (Brjuno 数). 对 α 连分数展开 $[a_1;a_2;a_3\cdots]$. 记 $\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots\cfrac{1}{a_n}}}$.

若 $\sum\frac{\log q_{n+1}}{q_n}<\infty$. 则称 α 为 Brjuno 数

9. KAM 理论的流程:

① 对 $f(x)=x+\alpha+g(x)$. 取 $H(x)=x+h(x)$. 目标是解 $f\circ H=H\circ R_\alpha$

$\Leftrightarrow f(x+h(x))=x+h(x)+\alpha+g(x+h(x))=x+\alpha+h(x+\alpha)$

$\Leftrightarrow$ 解 $h(x+\alpha)-h(x)=g(x+h(x))$ ← 作线性近似. 用 Fourier 展开解

$h(x+\alpha)-h(x)=g(x)-\hat{g}(0)$.

同时对 $\|h\|$ 有估计. 但注意! $\|h\|_{\sigma-\delta}$ 要缩小范围! 解得 h_1. 由 $-\frac{1}{2}\delta$

② 对 $H_1(x)=x+h_1(x)$ 不一定有 $f\circ H_1=H_1\circ R_\alpha$. 但也差不多! 试着看

$H_1^{-1}\circ f\circ H_1$ 与 R_α 差多少. ← 先证 H 可逆. 从而利用 Cauchy 不等式估计 $\|h'\|_{\sigma-2\delta}$

→ 令 $f_2(x)=H_1^{-1}\circ f\circ H_1=x+\alpha+g_2(x)$ ···→ 继续操作下去 Newton 迭代!!

Rieview of Dynamic System   Part F — 标准型理论   (15)

1.(共振) $A\in M_{n\times n}$. 其特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 组成的向量 $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 称为是共振的，

若 $\exists\ \vec{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{Z}^n$. $m_i\geq 0$. $\sum_{i=1}^n m_i\geq 2$. $\exists s$. s.t.

$$\lambda_s=\langle\vec{m},\vec{\lambda}\rangle=\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i$$

否则称为非共振. 这里记 $|m|=\sum m_i\geq 2$ 为共振的阶

2.(Poincaré) 对 $\dot{x}=Ax+V(x)$. 若A非共振 $\Rightarrow\ \exists\ x=y+h(y)$ 其中 $h(y)$ 为形式幂级数 s.t. $\dot{y}=Ay$.

$\longrightarrow\ \mathcal{L}_A h(y)=\frac{\partial h}{\partial y}AY-Ah(y)$. 这里 $h(y)$ 为关于 y 的向量值函数

(关键的是解同调方程 $\mathcal{L}_A h\ Y=V(y)$. 这么看这样) Jacobi矩阵.

Fact: $\mathcal{L}_A(y^m\vec{e_s})=(\langle m,\lambda\rangle-\lambda_s)y^m\vec{e_s}$. 若 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

3. 若A共振. 即有 $\lambda_s=\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i$ 且 $\sum_{i=1}^n m_i\geq 2$. 则称 $x^m\vec{e_s}=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\vec{e_s}$ 为对应的共振单项式.

$\lambda_1=2\lambda_2\longrightarrow$ 共振单项式 $x_2^2\vec{e_1}$. $\lambda_1+\lambda_2=0\longrightarrow$ 共振单项式 $x_1^k x_2^k x_s\vec{e_s}$.

4.(Poincaré-Dulac) 对 $\dot{x}=Ax+V(x)$. 且A共振. 则可通过 $x=y+h(y)$ 化为

$\dot{y}=Ay+w(y)$. 这里 $w(y)$ 中任一个单项式均为共振单项式

Example: $\dot{x}=\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}x+V(x)$. 由 Poincaré-Dulac 定理可化为

$$\dot{y}=\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}y+w(y).\quad 由\ \lambda_1=2\lambda_2\longrightarrow 共振单项式形如\ x_2^2\vec{e_1}.$$

从而 $w(y)$ 由 $y_2^2\vec{e_1}$ 组成. 也即 $\dot{y}=\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}ky_2^2\\0\end{pmatrix}$

Example: $\begin{pmatrix} 0 & \star p \\ -p & 0 \end{pmatrix}$ 见 Arnold P186.

5. (Poincaré域). 若$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$在$\mathbb{C}$上的凸包不包含原点.

(Siegel域) 若$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$的凸包含原点为内点.

6. Fact: Poincaré 域中至多只有有限次共振, 并且 0 是$\{\lambda_s-\langle m,\lambda\rangle \mid m_i\ge 0,\ \sum m_i\ge 2,\ \forall s\}$的孤立点集.

$\Leftrightarrow$ $\forall M$, 只存在有限多$m\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}$, and $1\le s\le n$ s.t. $|\lambda_s-\langle m,\lambda\rangle|\le M$

Proof: 由凸集分离定理, 存在一个线性映射 $l(x)=\alpha$, $l:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 分离凸包和原点. 从而不妨假设有$r>0$, $l(\lambda_k)\le -r$.

$\to l(\langle\alpha,\lambda\rangle)\le -r|\alpha|$. 记 $-R=\min l(\lambda_k)$, $R>0$.

$\Rightarrow$ 记$\|l\|=\max\limits_{|z|=1}|l(z)|$. 则 $\|l\|\,|\lambda_k-\langle\alpha,\lambda\rangle|\ge l(\lambda_k-\langle\alpha,\lambda\rangle)$

$\ge l(\lambda_k)+r|\alpha| \ge -R+r|\alpha|$.

则有 $|\lambda_k-\langle\alpha,\lambda\rangle|\le M \Rightarrow r|\alpha|\le R+\|l\|M$. $\Rightarrow |\alpha|\le\frac{R+\|l\|M}{r}$

$\Rightarrow \alpha$ 有限! □

7. Fact: Siegel 域 $\begin{cases}\text{或者有无穷多次共振} \\ \text{或者 0 为 } \{\lambda_s-\langle m,\lambda\rangle \mid m_i\ge 0,\ \sum m_i\ge 2,\ \forall s\} \text{ 的聚点.}\end{cases}$

8. Summary: Poincaré 域主要结果

$\begin{cases}\text{Poincaré 定理} \\ \text{Poincaré-Dulac 定理.}\end{cases}$

9. Diophantine 条件 $\lambda(A)\in DC(r,\tau)$. $|\lambda_s-\langle m,\lambda\rangle|\ge\frac{r}{|m|^{\tau}}$, $\forall 1\le s\le n$, $\forall m_i\ge 0$ $\sum m_i\ge 2$

($\lambda(A)\in DC(r,\tau)\Rightarrow\lambda(A)$ 非共振)

10. 若 $\tau > \frac{n-2}{2}$，则 $\bigcup_{r>0} DC(r,\tau)$ 为 Lebesgue 全测集.

其补集为 $\bigcap_{r>0} (DC(r,\tau))^c$. $DC(r,\tau)^c = \bigcup_{s=1}^{n} \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ |m|\geq 2}} \underbrace{\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n \mid |\lambda_s-\langle m,\lambda\rangle| \leq \frac{r}{|m|^\tau}}_{(*)}$

而每个 (*) 是个测度 $\leq \frac{(2r)^2}{(|m|^{\tau+1})^2} \times \mathbb{R}^{2n-2}$ 的区域. 从而 $DC(r,\tau)^c$ 为个测度 $\leq \frac{n\cdot m^{n-1}(4r)^2}{|m|^{2\tau+2}} \times \mathbb{R}^{n-2}$ 的区域. 又 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{n-1}}{|m|^{2\tau+2}} < \infty \Rightarrow \bigcap_{r>0}$ 为零测集!

11. (解析版本的 Poincaré 定理)

$\dot{z} = A(z) + V(z)$ (*) 其中 $V(z) = \sum V_k z^k = O(|z|^2)$. 为高阶的解析向量函数. 若 $\lambda(A) \in DC(r,\tau)$. $\Rightarrow \exists h: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 解析. s.t.

$z = \xi + h(\xi)$. 将 (*) 变为 $\dot{\xi} = A\xi$.

(关键引理：记 B_ρ 表示解析并且 $\sum |V_k| \rho^{|k|} < \infty$ 的解析函数全体.

若 $V \in B_\rho$. $\lambda(A) \in DC(r,\tau)$. $\Rightarrow L_A h = V$. $L_A h(y) = \frac{\partial h}{\partial y} Ay - A h(y)$. 有解.

不妨先展开对角化. $V = (V^1,\dots,V^n)$. $h = (h^1,\dots,h^n)$.

则有 $L_A h^s = V^s$. 其中 $V^s = (\sum V_{k,s} z^k) e_s$. $h^s = (\sum h_{k,s} z^k) e_s$

若 A 可对角化 则 有 $L_A h^s = \sum h_{k,s}(\lambda_s - \langle k,\lambda\rangle) z^k e_s = (\sum V_{k,s} z^k) e_s$

$\Rightarrow h_{k,s} = \frac{V_{k,s}}{\lambda_s - \langle k,\lambda\rangle} \Rightarrow$ 有解. 关键地展开.

$\rightarrow \|h\|_{\rho e^{-\delta}} = \sum |h_{k,s}| (\rho e^{-\delta})^{|k|} = \sum \frac{|V_{k,s}|}{|\lambda_s - \langle k,\lambda\rangle|} (\rho e^{-\delta})^{|k|}$

--- 可以继续 h 的估计.

12. (Floquet) $\dot{x} = A(t)x$. $A(t+T)=A(t)$. 则 $\exists$ $X=S(t)Y$.

$S(t)=S(t+T)$. 且 $B\in M_{n\times n}$. s.t. $\underline{\underline{\dot{Y}=BY}}$.

13. $\dot{x} = A(t)x + \overline{V}(t,x)$ $\xrightarrow{\text{Floquet}}$ $\dot{y} = By + V(t,y)$

$A(t+2\pi)=A(t)$ $\qquad$ $V(t+2\pi,y)=V(t,y)$

$\overline{V}(t+2\pi,x) = \overline{V}(t,x)$

$\underline{\text{目标}}\rightarrow$ 找 $y = z+h(t,z)$. $\dot{z}=Bz$.

$$\dot{z} + \frac{\partial h}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial h}{\partial t} = Bz + Bh(t,z) + V(t,z+h(t,z))$$

$$\Rightarrow (id + \frac{\partial h}{\partial z})\dot{z} = Bz - \frac{\partial h}{\partial t} + Bh(t,z) + V(t,z+h(t,z))$$

$$\Rightarrow \dot{z} = (id - \frac{\partial h}{\partial z} + (\frac{\partial h}{\partial z})^2 - \cdots)(Bz - \frac{\partial h}{\partial t} + Bh(t,z) + V)$$

$$= Bz \underbrace{- \frac{\partial h}{\partial t} + Bh(t,z) + V(t,z+h(t,z)), - \frac{\partial h}{\partial z}Bz}_{0}$$

$$\boxed{L_B h + \frac{\partial h}{\partial t} = V}$$

对 V 进行 Fourier Taylor 展开 $\quad V(t,z) = \sum V_{k,m,s} e^{ikt} z^m e_s$.

$$h(t,z) = \sum h_{k,m,s} e^{ikt} z^m e_s$$

$$L_B(e^{ikt} z^m e_s) = e^{ikt}(\lambda_s - \langle m,\lambda\rangle) z^m e^s$$

$$L_B h + \frac{\partial h}{\partial t} = V \Rightarrow h_{k,m,s} = \frac{V_{k,m,s}}{\langle m,\lambda\rangle - \lambda_s + ik}$$

$\boxed{\text{Summary}}$ 解同调方程 $\underline{L_B h = V}$ 作 Taylor 展开 对比系数

对解析情形的方程 都能解开!!