代数拓扑——左岸孤单人

Chern Class 凯淼淼

在本笔记中，我们遵循如下记号：

- $\cong$：拓扑空间间的同胚；
- $\simeq$：拓扑空间之间的同伦等价；
- $A \setminus B$：A 与 B 的差；
- A/B：A 商去 B；
- S^n：n 维单位球面；
- D^n：n 维闭单位球；

重点回顾的题目：2.2.8，2.6.10-2，2.6.16-9/10，2.7 节应用矩阵初等变换转化伦型的问题 (不能将具体例子和算法对应起来)

目录

1 拓扑空间的同胚型

定理 1.1. 关于一点紧化，有如下基本事实：

- 任何 *Hausdorff* 空间均可定义其一点紧化空间；
- 紧空间 X 的一点紧化空间为 $\boxed{X \text{ 和一点的不交并，也即 } X \sqcup *}$；
- $(\mathbb{R}^n)^* \cong S^n$，同理 $S^n \setminus * \cong \mathbb{R}^n$；
- 一个十分常用的等式 (同时添上/减去一点)：

$$\boxed{A^* \setminus B^* = A \setminus B}.$$

定理 1.2. 关于乘积空间的边界，我们有

$$\boxed{\partial(A \times B) = (A \times \partial B) \cup (\partial A \times B)},$$

也即满足"*Lebniz* 法则".

Problem 1. 对于 $m, n \geq 0$，我们有同胚

$$\boxed{S^{m+n+1} = D^{m+1} \times S^n \cup S^m \times D^{n+1}}.$$

证明 利用定理1.2. □

Problem 2. 对于 $m > 0$ 和 $n \geq 0$，我们有同胚

$$\boxed{\mathbb{R}^{m+n} \setminus \mathbb{R}^n \cong S^{m+n} \setminus S^n \cong \mathbb{R}^{n+1} \times S^{m-1}}.$$

证明 第一个同胚：利用定理1.1，则

$$\mathbb{R}^{m+n} \setminus \mathbb{R}^n = (S^{m+n})^* \setminus (S^n)^* = S^{m+n} \setminus S^n.$$

第二个同胚：利用乘积空间做差：

$$\mathbb{R}^{m+n} \setminus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\} = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m - \{0\}),$$

结合 $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong \mathbb{R} \times S^{m-1}$(球坐标)，即可证明. □

定理 1.3. 十分重要!!! 如果 K 为紧 *Hausdorff* 空间 X 的闭子集，则我们有

$$\boxed{(X \setminus K)^* \cong X/K},$$

如果 K 为局部紧 *Hausdorff* 空间 X 的闭子集，则我们有

$$\boxed{(X \setminus K)^* \cong X^*/K^*},$$

每当我们计算商空间，或者求一个差空间的一点紧化时，都应该想到此定理.

Problem 3. 实心球商去边界为同维数的球面，只是因为

$$\begin{aligned} D^n/\partial D^n &\cong (D^n \setminus \partial D^n)^* \\ &\cong (\mathbb{R}^n)^* \cong S^n, \end{aligned}$$

其中第二个同胚是利用了 n 维开球同胚于 $\mathbb{R}^n$，从而一点紧化空间同胚.

Problem 4. 对于 $m > n$，有

$$\boxed{(\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^n)^* \cong (S^m \setminus S^n)^* = S^m/S^n}.$$

Problem 5. 环面将对角线对应的圆周压成一点 $(S^1 \times S^1/\Delta(S^1 \times S^1))$，和将一个腰圆压成一点 $(S^1 \times /1 \times S^1)$ 同胚，且均同伦等价于 S^2/S^0.

证明 对前两者同胚的看法是：画出环面正方形表示，沿对角线剪开，再粘上两边，此时得到的图景就是环面将腰圆压成一点. □

Problem 6. 我们有环面的商空间：

- $S^1 \times S^1/(1 \times S^1) \cup (S^1 \times 1) = S^2$，即环面的两个腰圆均压成一点，会得到球面；
- $S^1 \times S^1/(1 \times S^1) \cup \Delta(S^1 \times S^1) = S^2$，即将环面的一个腰圆和一个对角圆压成一点，也会得到球面.

证明 仍然用正方形表示去看，注意剪切和粘贴的顺序不会影响最终商空间的同胚型，从而可以随意操作. □

定义 1.4 (拓扑空间的运算). 设 $X, Y \in \mathsf{Top}$，A, B 分别为其子空间，$x_0 \in X, y_0 \in Y$：

1. *join*：$X * Y := \{tx + (1-t)Y | t \in [0,1]\}$，直观想象就是一个四面体，两个对棱分别代表 X 和 Y，对任意 t，切一刀 $X * Y$ 均为 $X \times Y$，用一个线段表示一个拓扑空间往往会辅助我们想象，以及构造抽象映射式子；
2. 空间偶的乘积：$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$；
3. 带基点空间的一点并空间：$(X \vee Y, *) := (X, x_0) \vee (Y, y_0) := X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$，或者看成是 $X \times Y$ 的子空间，$(X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$，直观想象就以环面和其一维胞腔为例；
4. 带基点空间的压缩积空间：$(X \wedge Y, *) := (X, x_0) \wedge (Y, y_0) := (X \times Y)/(X \vee Y)$，之所以考虑这个空间，是因为在带基点的拓扑空间范畴中，我们需要考虑“空间乘积”，但由空间偶的乘积，我们知道 $(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y))$，不能够自然成为一个带基点的空间，从而我们需要“把这个多余的空间压成一点”，结合上一条便可知这个多余空间恰好为一点并。

注 1.5. 在同伦论中，设 $F(X, Y) := \mathsf{Mor}(X, Y)$，则有 $F(X \wedge Y, Z) \cong F(X, F(Y, Z))$，利用这个等式结合回路空间 $\Omega X = F(S^1, X)$ 与 X 约化双角锥空间 $\Sigma X = X \wedge S^1$，我们有伴随等式

$$F(\Sigma X, Y) = F(X, \Omega Y),$$

同时作用 π_0，我们有 $[\Sigma X, Y] = [X, \Omega Y]$，这里 $[\cdot, \cdot]$ 表示映射同伦类，由此便可看到压缩积空间的重要性。

定理 1.6. 设空间偶 (X, A) 和 (Y, B) 满足 X 和 Y 均为紧 *Hausdorff* 空间，A, B 均为闭子空间，则

$$\boxed{((X \times Y)/\left((X \times B) \cup (A \times Y)\right), *) \cong ((X/A) \wedge (Y/B), *)}.$$

记忆方式. 将压缩积定义中压掉 $X \vee Y$ 换成拓扑空间偶的乘积，换言之乘积空间商去乘积子空间，其实就是分别子空间取商再做“乘积” (时刻注意 Top° 范畴中乘积就是压缩积)，也即“乘积与商可交换”。 □

Problem 7. 我们有

$$\boxed{S^m * S^n \cong S^{m+n+1}},$$
$$\boxed{S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}}.$$

证明 对于第一个，我们可以直接写出同胚等式：

$$f: S^m * S^n \to S^{m+n+1}, \quad [x,y,t] \mapsto (\sqrt{t}x, \sqrt{1-t}y),$$

这里 x,y 为嵌入欧氏空间的标准坐标。

对于第二个，我们结合 $S^m = D^m/\partial(D^m)$，从而

$$S^m \wedge S^n = (D^m/\partial(D^m)) \wedge (D^n/\partial(D^n)) = D^m \times D^n/\partial(D^m \times D^n) = S^{m+n}.$$

其中用到了定理1.6。事实上对于低维我们也可以直接想象，如 $m=n=1$，则可利用问题 6，环面压掉两个腰圆即为 S^2。 $\square$

定义 1.7. 拓扑空间 X 的锥空间 $\widetilde{C}(X)$ 和双角锥空间 $\widetilde{\Sigma}(X)$ 定义为商空间：

$$\widetilde{C}(X) := (X \times I)/(X \times 0),$$
$$\widetilde{\Sigma}(X) := \widetilde{C}(X)/([X \times 1]).$$

带基点的拓扑空间 (X, x_0) 的锥空间 $(C(X), *)$ 和双角锥空间 $(S(X), *)$ 定义为压缩积空间：

$$(C(X), *) := (X \wedge I, *)$$
$$(\Sigma(X), *) := (X \wedge S^1, *).$$

对于直观想象约化 (带基点) 情形的锥空间和双角锥空间，就是把原本基点对应的线段 $x_0 \times I$ 压缩成一点即可，比如先画出 $\widetilde{\Sigma}(S^1 \vee S^1)$，再将中线压成一点，即可得到 $\Sigma(S^1 \vee S^1) = S^2 \vee S^2$，而并不是直接去想象和 S^1 的压缩积。

定理 1.8. 十分重要!!! 对于紧 *Hausdorff* 空间 X 和 Y，我们有以下结论：

1. $\left(\widetilde{C}(X*Y), X*Y\right) \cong \left(\widetilde{C}(X), X\right) \times \left(\widetilde{C}(Y), Y\right)$；
2. $\left(\widetilde{\Sigma}(X*Y), *\right) \cong \left(\widetilde{\Sigma}(X) \wedge \widetilde{\Sigma}(Y), *\right)$;
3. $\left(\widetilde{C}\left(\widetilde{\Sigma}(X*Y)\right), \widetilde{\Sigma}(X*Y)\right) \cong \left(\widetilde{C}(X), X\right) * \left(\widetilde{C}(Y), Y\right)$.

注 1.9. 第一条比较好记，第二条就是在第一条的基础上考虑

$$\widetilde{\Sigma}(X*Y) = \widetilde{C}(X*Y)/(X*Y),$$

然后在用乘积空间偶的商空间等于各自空间偶商空间的压缩积即可。

命题 1.10. 一些相关的结论：

- $(X_1 \vee X_2) \wedge X_3 \cong (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$;

- 局部紧 *Hausdorff* 空间 X，Y 的一点紧化空间满足 $(X \times Y)^* \cong X^* \wedge Y^*$；
- 局部紧 *Hausdorff* 空间 X，Y 的一点紧化空间满足 $(X \sqcup Y)^* \cong X^* \vee Y^*$。

定义 1.11 (映射锥空间)**.** 映射 $f : X \to Y$ 的映射锥空间 $\widetilde{C}_f$ 定义为

$$\widetilde{C}_f(X) := \left(\widetilde{C}(X) \sqcup Y\right) / \sim$$

其中对任意 $x \in X$，底盘上的点 $[1, x] \sim f(x)$ 给出等价关系。

2 拓扑空间的同伦型

定理 2.1. 映射的同伦关系满足以下性质：

1. 设 $f_1 \simeq f_2$，$g_1 \simeq g_2$，则 $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$；
2. 设 $f_1 \simeq f_2$，$g_1 \simeq g_2$，则 $f_1 \times g_1 \simeq f_2 \times g_2$，$f_1 * g_1 \simeq f_2 * g_2$；
3. 是 $f, g : X \to Y$ 满足 $f \simeq g$，则 $\widetilde{\Sigma}(f) \simeq \widetilde{\Sigma}(g)$，其中 $\widetilde{\Sigma}(h) : \widetilde{\Sigma}(X) \to \widetilde{\Sigma}(Y)$ 定义为 $\widetilde{\Sigma}(h)[t, x] := [t, h(x)]$。

利用上述定理，我们可以立刻得到：

定理 2.2. 如果拓扑空间 $X_1 \simeq X_2$，$Y_1 \simeq Y_2$，则

$$X_1 \times Y_1 \simeq X_2 \times Y_2, \quad X_1 * Y_1 \simeq X_2 * Y_2, \quad \widetilde{\Sigma}(X_1) \simeq \widetilde{\Sigma}(X_2).$$

一些十分常用的工具是：

定理 2.3. 设 $f, g : X \to Y$，则对于映射锥空间 $\widetilde{C}_f := (\widetilde{C}(X) \sqcup Y)/\sim$，其中 $[1, x] \sim f(x)$，我们有如果 $f \simeq g$，则 $\widetilde{C}_f \simeq \widetilde{C}_g$。

Problem 8. $O(n)$ 为 $GL(n, \mathbb{R})$ 的强形变收缩核。

证明. 由 Gram-Schmidt 正交化，每一个可逆矩阵都可以唯一写成一个正交矩阵和一个主对角线大于 0 的上三角矩阵的乘积，记后者为 $T(n)$，即我们有 $GL(n, \mathbb{R}) = T(n) \times O(n)$，注意到

$$T(n) \cong \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^{1+\cdots+(n-1)} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2},$$

从而可缩，即证。 □

定理 2.4. 我们有一些好用的性质：

1. $\boxed{\text{若 } A_i \text{ 为 } X_i \text{ 的强形变收缩核，则 } A_1 \times A_2 \text{ 为 } X_1 \times X_2 \text{ 的强形变收缩核。}}$

   利用这个我们可以得到：

   - $\mathbb{R}^{m+n} \setminus ((\mathbb{R}^m \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R}^n)) = (\mathbb{R}^m \setminus 0) \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \simeq S^{m-1} \times S^{n-1}$；
   - $S^m \times S^n \setminus S^m \vee S^n = (S^m \setminus *) \times (S^n \setminus *) \simeq *.$

   这类问题要注意观察将给定的形式写成乘积空间。

2. $\boxed{\text{映射锥空间扣去顶点同伦等价于底空间。}}$

   利用这个我们可以得到：

- $S^n \setminus * \simeq *$;
- $(S^m \times S^n) \setminus * \simeq S^m \vee S^n$，这可以从胞腔粘贴角度看出来是映射锥。

3. $\boxed{\text{join 空间扣去两端中的一端同伦等价于另一端，} (X * Y) \setminus X \simeq Y\text{。}}$

   利用这个我们可以得到：$S^{m+n} \setminus S^n \simeq S^{m-1}$。当然对于这一个，我们也可以用经典一点紧化的技术，也即 $S^{m+n} \setminus S^m = (\mathbb{R}^{m+n})^* \setminus (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^{m+n} \setminus \mathbb{R}^n = \cdots$。

4. $\boxed{\text{join 空间扣去两端同伦等价于中间也即乘积空间，} X * Y \setminus (X \sqcup Y) \simeq X \times Y\text{。}}$

   利用这个可以应用在 S^{m+n+1} 上，看到高维球面就要想到可以转化成 *join* 乘积去处理。

Problem 9. 对于映射 $f : X \to Y$，我们有 $\widetilde{C}_{\{f,f\}} \simeq \widetilde{C}_f \vee \widetilde{\Sigma}(X)$，进而将 S^n 的赤道 S^{n-1} 按照对径点粘起来得到的空间同伦等价于 $\mathbb{RP}^n \vee S^n$。

定理 2.5. 十分重要!!! 我们有

$$\boxed{(S^n \setminus K)^* \simeq S^n/K \simeq S^n \vee \widetilde{S}(K)}.$$

现在对于 $\mathbb{R}^n$，若 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的非退化$\boxed{\text{紧}}$子空间，则

$$\boxed{(\mathbb{R}^n \setminus K)^* \cong (\mathbb{R}^n)^*/K^* = S^n/(K \sqcup *) = S^n \vee \widetilde{S}(K) \vee S^1},$$

K 为 $\mathbb{R}^n$ 的非退化$\boxed{\text{无界闭}}$子空间，则

$$\boxed{(\mathbb{R}^n \setminus L)^* \simeq S^n \vee \widetilde{S}(L^*)}.$$

定理 2.6. 设 A_i 为 $X_i \setminus B_i$ 的强形变收缩核，则有

$$(X_1 \times X_2) \setminus (B_1 \times B_2) = ((X_1 \setminus B_1) \times X_2) \cup (X_2 \times (X_2 \setminus B_2)) \simeq (A_1 \times X_2) \cup (X_1 \times A_2).$$

这在考虑补空间的同伦型的时候非常有用。

Problem 10. 对于 $n > m$，有

$$\mathbb{R}^n \setminus S^m \simeq D^n \setminus \frac{1}{2}S^m \simeq S^n_+ \setminus \left(\frac{\sqrt{3}}{2}S^m, 0, \frac{1}{2}\right) \simeq S^n_+ \setminus \left(\frac{\sqrt{3}}{2}S^m, 0, -\frac{1}{2}\right) \simeq \boxed{S^{n-1} \vee S^{n-m-1}}.$$

证明 前面四个等价都是同胚意义下的，要紧的是最后一个，我们从第二个出发，注意到 $D^n = D^{m+1} \times D^{n-m-1}$，$\frac{1}{2}S^m = \frac{1}{2}S^m \times 0$，然后从低维画图即可看出。 $\square$

定理 2.7. 设 A 为 $X \setminus B$ 的强形变收缩核，则有

$$\widetilde{C}(X) \setminus [\frac{1}{2}, B] \simeq X \cup CA \simeq X/A.$$

证明 证明要点在于，在很好的条件下，A 为 X 的强形变收缩核蕴含着 $A/\sim$ 为 $X/\sim$ 的强形变收缩核，从而我们可以交换商和同伦形变的顺序。

因此我们对 $(I \times X) \setminus \left(\frac{1}{2} \times B\right)$，我们有其同伦等价于 $(\{0,1\} \times X) \cup (I \times A)$，现在再把上端压成一点，即可得到 $X \cup CA$。 □

Problem 11. 作为上一定理的推论，我们有若 A 为 $S^n \setminus B$ 的强形变收缩核，则 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B \simeq S^n \vee \widetilde{S}(A)$，用这个结论也能很快看出上一题。

特别的，我们还有

1. $\mathbb{R}^{n+m+2} \setminus ((S^m \times 0) \cup (0 \times S^n)) \simeq S^{n+m+1} \vee \widetilde{S}(S^m \times S^n)$；
2. 2.6.10

十分重要!!! 十分重要!!! 十分重要!!! 对于题目 2.6.15，完全套用定理 2.5 即可，非常简单，只要是看到求欧氏空间或者球面补空间的**一点紧化空间**，就用定理 2.5!!!

定理 2.8. 扭结补空间的同伦型的求法：

1. 第一步：写出其平面投影图的结构群；
2. 第二步：写出节点处重合的关系；
3. 第三步：化简约化，注意留下重复的关系，并记作 1。

Problem 12. 一道难题：证明 $(S^m)^* \wedge S^n \simeq S^{m+n} \vee S^n$.

证明 首先由压缩积的定义，$(S^m)*\wedge S^n = ((S^m \times S^n) \sqcup (* \times S^n))/((S^m \times *) \cup (* \times *) \cup (* \times S^n))$，从而可知这实际上就是 $(S^m \times S^n)/(S^m \times *)$，由胞腔结构，设 $\psi : S^{m+n-1} \to S^m \vee S^n$ 表示胞腔粘贴映射，现在设 $j : S^m \vee S^n \to S^n$ 表示将 S^m 压成一点的商映射，从而 $(S^m \times S^n)/(S^m \times *)$ 的胞腔结构为 D^{m+n} 的边界 S^{m+n-1} 按照 $j\psi$ 粘贴到 S^n 上。

又注意到设 $i : S^m \vee S^n \to S^m \times S^n$ 为嵌入映射，$p : S^m \times S^n \to S^n$ 为投影映射，从而 $j = pi$，又注意到 $i\psi : S^{m+n-1} \to S^m \times S^n$ 零伦，因为这相当于是 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C_f$，从而可知 $j\psi = pi\psi$ 零伦，因此同伦等价于 $S^{m+n} \vee S^n$。 □

3 同调计算——泛系数定理

定理 3.1 (泛系数定理). *对任意拓扑空间 X，$n \in \mathbb{N}$，以及 Abel 群 G，我们有*

1. *整系数同调群计算一般系数同调群：*
$$\boxed{H_n(X;G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}\left(H_{n-1}(X), G\right)};$$
2. *整系数上同调群计算一般系数上同调群：*
$$\boxed{H^n(X;G) \cong (H^n(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}\left(H^{n+1}(X), G\right)};$$
3. **(经常用)***整系数同调群计算一般系数上同调群：*
$$\boxed{H^n(X;G) \cong \mathrm{Hom}\left(H_n(X), G\right) \oplus \mathrm{Ext}\left(H_{n-1}(X), G\right)}.$$
4. **(更常用)***设闭流形 M 的同调群满足 $H_k(M) = F_k \oplus T_k$ 为自由与挠部分解，则*
$$\boxed{H^{n-k}(M) \cong F_k \oplus T_{k-1}}.$$

3.1 张量积与 Tor 的运算

关于张量积的运算，绝大多数时候直接看生成元即可，如

1. $\boxed{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_m}$;
2. $\boxed{\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{(m,n)}}$，这里 $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$. 考虑生成元 $1_m \otimes 1_n$，从而一方面设 $(m,n) = pm + qn$，则 $(m,n) \cdot (1_m \otimes 1_n) = 0$，另一方面任意小于 (m,n) 的无法零化 $1_m \otimes 1_n$，从而可知命题成立；
3. $\boxed{\mathbb{Z} \otimes G = G}$ 对任意 Abel 群 G 均成立，从而 $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$，$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$；
4. $\boxed{G \otimes \mathbb{Q} = G^{\mathsf{F}}}$，即张量积上一个域会去掉 torsion 的部分，只留下自由的部分.

定义 3.2 (Tor 的定义). *设 $B = F_1/F_2$，这里 F_1 为自由 Abel 群，F_2 为 F_1 的子群 (从而也为自由 Abel 群)，对于 $F_2 \xrightarrow{i} F_1$ 自然的嵌入映射，我们记*
$$\mathrm{Tor}(A,B) := \ker\left(A \otimes F_2 \xrightarrow{1 \otimes i} A \otimes F_1\right).$$

注意到利用基本的代数知识可以证明，Tor 不依赖于 F_1, F_2 的选取，所以我们在具体计算时往往会选取一组最显然与直观的，我们有如下性质：

1. $\boxed{\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Tor}(B,A)}$，这并不平凡，但心理上易于接受；
2. $\boxed{\mathrm{Tor}(A,B) = 0}$，如果 A, B 有一者为自由 Abel 群；
3. $\boxed{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{(m,n)}}$，设 $a_m \otimes nk$ 送过去为 0，说明 $a_m \otimes nk$ 在 $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}$ 中为 0，

4 同调计算——单纯同调与胞腔同调

计算 $T(x_1, x_2, \cdots, x_k; r_1, \cdots, r_m)$ 的同调群，非常简单，将 r_i 写成一行，做初等变换，最后划归成对角矩阵，然后看这个东西的 Im，看最高阶同调群就是 ker，就是最后零行的数目。

单纯同调群就是先根据商关系写出单纯链复形，然后再算，注意：粘贴成同一点的并不意味着对应连线为 0。