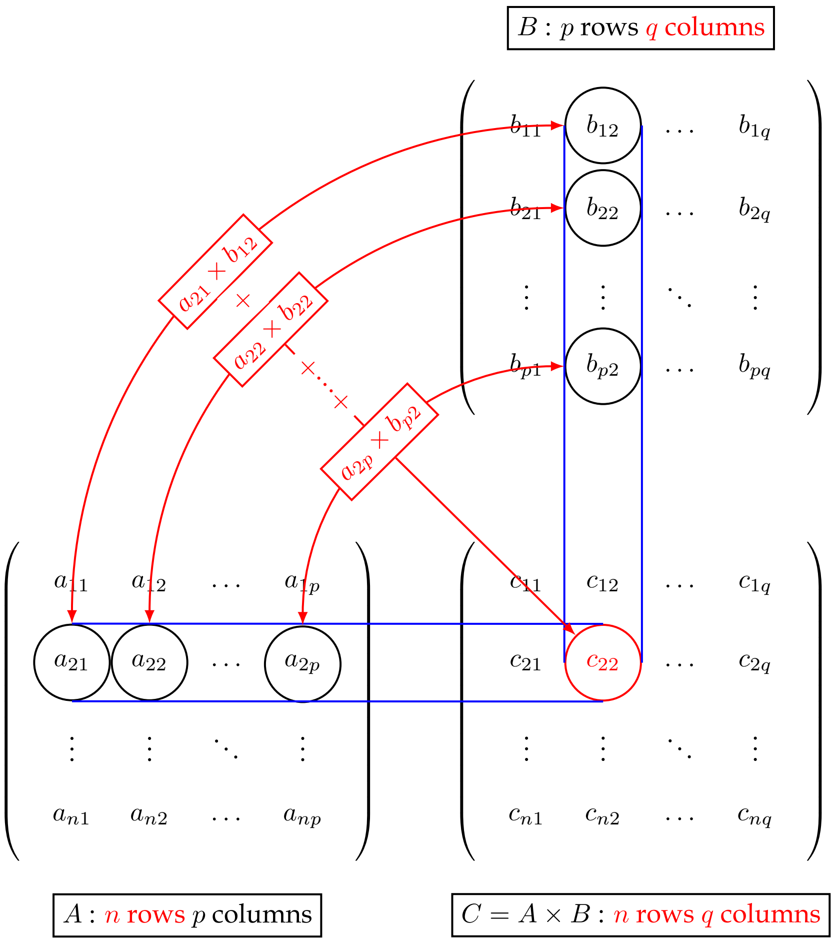
2022 数分高代拯救计划

第二次高代考前辅导



朱凯

2021 级数学 (省身班)

目录

数分高代拯救计划——第二次高代月考考前辅导

2021 级省身班　朱凯　知乎：凯森森

第二次高代月考的考察范围主要会涉及到以下内容：

- 消元法解线性方程组/用初等行变换将增广矩阵变为约化阶梯形；
- 向量组的线性表出，线性相关，线性无关，极大线性无关组与秩；
- 矩阵的秩，用初等行变换求矩阵的秩；
- Cramer 法则及其逆定理，线性方程组有解判别定理；
- 线性方程组解的结构，基础解系；
- 矩阵的一元运算：转置、取逆、取共轭、数乘等；
- 矩阵的二元运算：加法、乘法、Kronecker 积 (*)；
- 分块矩阵运算，分块初等变换，初等矩阵，利用初等变换求逆矩阵；
- 特殊方法：相抵标准型的综合运用，摄 (扰) 动法，“打洞”法，降阶，基础矩阵的运用.

同学们可以参考上述知识点合上书本回忆，是否熟练一些基本算法，保证每个算法都了如指掌.

注：例题中标记为 (*) 的是与月考难度相近的问题，为主要讲解内容，* 数量越高题目相对难度越大，作为选讲题，同时也可以作为补充练习.

1　线性方程组

1.1　向量组的线性表出，线性相关，线性无关，极大线性无关组与秩

导言 这部分内容在初学时容易因为“看不见”线性相关和线性无关而感到抽象和困难，从而总是试图将向量转化为具体的列或行向量，但事实上，直接从线性相关的定义出发，设出系数，结合题意讨论系数是否全为 0 即可.

例 1.1 (*). 已知 $n \geq 3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关向量组. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是线性无关向量组，证明：n 为奇数.

例 1.2 (*). 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 r，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意 r 个线性无关的向量组都构成它的一个极大线性无关组.

例 1.3 (*). 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性表出，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 有相同的秩.

例 1.4 (*). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in\mathbb{P}^{n\times 1}$ 是某个齐次线性方程组的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{P}^{n\times 1}$ 不是这个齐次线性方程组的解，证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

1.2 用初等变换求矩阵/向量组的秩，求向量组的极大线性无关组与线性表示

导言 这部分内容比较容易，课本定理的逻辑就是：矩阵的秩，行秩等于列秩，初等变换不改变秩，初等变换一定能化成阶梯型矩阵，从而根据这个顺序就不难计算出矩阵的秩，向量组的秩就是拼成矩阵的秩. 极大线性无关组就是阶梯点对应的向量.

另一方面，就是需要熟悉矩阵的秩几种等价描述方式：最大阶非零子式，行秩与列秩，初等变换后阶梯点的个数以及从线性方程组解的角度.

例 1.5 (*). (1) 求下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大线性无关组，并把其余的行向量用该极大线性无关组标出.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\\1&-1&3&-1\end{pmatrix}.$$

例 1.6 (*). 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)$.
(1) 当 p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；
(2) 当 p 为何值时, 该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

例 1.7 (*). 证明: 如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 那么它的任何 s 行组成的子矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的秩大于或等于 $r+s-m$.

例 1.8 (**). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性无关的向量，若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots a_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m,\\ \cdots\\ \boldsymbol{\beta}_k=a_{k1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{k2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots a_{km}\boldsymbol{\alpha}_m.\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{k\times m}$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

例 1.9 (**). (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2023×2023 阶矩阵，且主对角线上元素全为 0，每行恰有 1011 个 1111 和 1011 个 -1111，证明：$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2022；

(2) 二食堂二楼某窗口一次性出餐了 $2n+1$ 盘孜然羊肉，从其中任意拿走一盘，剩下的孜然羊肉都可以分成两堆，每堆 n 盘，总重量相等. 证明：每盘孜然羊肉的重量都相等.

例 1.10 (***). 设 $1, 2, 3, \cdots, n^2$ 排列成一个 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，我们关心 $\boldsymbol{A}$ 的秩的取值：
(1) 我们知道对矩阵作初等变换不改变其秩，从而不妨假设 1 位于左上角，再将第一行的最大元记为 $a_{1i} = M_1$，第一列的最大元记为 $a_{j1} = M_2$，证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & M_1 \\ M_2 & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 存在 2 阶非零子式，即 秩$(\boldsymbol{A}) \geq 2$；
(2) 对任意 $2 \leq k \leq n$，证明：存在一个排列成的矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得其秩为 k.

1.3 线性方程组的解法，解的结构，基础解系

导言 这部分逻辑首先是线性方程组初等行变换化为阶梯型矩阵，解不变，从而只需要把问题归结为对阶梯型矩阵的讨论即可，这部分较难的体现在对基础解系的理解和运用上，同时也要熟悉线性方程组的几种等价形式，如 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 或者写成向量组的线性表示.

例 1.11 (*). a, b 取什么值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b, \end{cases}$$

有解？在有解的情形下，用基础解系表示出一般解.

例 1.12 (*). 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{n\times n}$，$|\boldsymbol{A}| = 1$，$M_{ij}$ 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的余子式. 证明：
(1) $(-M_{11}, M_{12}, \cdots, (-1)^n M_{1n})$ 是下面线性方程组的解：

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots a_{3n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

(2) 若 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是另一组解，则存在 $x \in \mathbb{P}$，使得任意 $1 \leq i \leq n$，有 $y_i = c(-1)^i M_{1i}$.

例 1.13 (**). 设实数域上 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

满足如下两个条件: (1) $m<n$; (2) $2\left|a_{ii}\right|>\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|, i=1,2,\cdots,m$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 m .

例 1.14 (*). 设 $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 证明 $\boldsymbol{H}$ 的任意 s 列 ($s\leq \min\{m,n\}$) 都线性无关当且仅当齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

的任一非零解的非零分量数目大于 s .

2 矩阵

2.1 矩阵的运算，转置，伴随，取逆

导言 这部分运算比较基础，熟练掌握矩阵乘法的规则即可，较难的部分可能是对于非具体矩阵的计算推导，需要熟悉一些基本的运算规则，特别是矩阵运算与行列式的关系.

例 2.1 (*). 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 满足 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}_n$，证明：$(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})^2=\boldsymbol{E}_n$.

例 2.2 (*). 若 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵.

例 2.3 (*). 若 2021 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ ，求证：$|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}|=0$.

例 2.4 (*). 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{AB}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}$ 可逆，且其逆为 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$.

例 2.5 (*). 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均可逆，证明：$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且其逆为 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

例 2.6 (*). 证明：$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-k}=\begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} & \mathrm{C}_n^2x^{n-2} \\ 0 & x^n & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}$.

注: 这种拆分的方法很具有启发性，在算矩阵的高次幂有着重要价值，可以仔细体会.

例 2.7 (**). 设 n 为正整数，λ 为非零实数，计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\lambda}{n} \\ -\dfrac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$，这里一列矩阵的极限矩阵即为每个位置对应的数列取极限.

例 2.8 (***). 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，其元素均为正整数且行列式为 1，证明：存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^k$.

2.2 分块矩阵的运算与分块初等变换，初等矩阵

导言 这部分运算初学可能会不太适应，但是只需要“强迫”自己把矩阵当作“数”去计算，只需要分清楚是左乘还是右乘即可. 另外就是从左乘右乘初等矩阵导出求可逆矩阵的一般方法，以及进一步导出的相抵标准型.

例 2.9 (*). 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{m\times m}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{P}^{m\times n}$，且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=2$. 求 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 的行列式，并求 $\boldsymbol{D}$ 的逆矩阵.

例 2.10 (*). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 2.11 (**). 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-5&3&3&1\\1&3&9&7\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

3 方法与技巧

3.1 基础矩阵的运用

导言 这部分技巧主要可以方便“严谨”地写出很多矩阵运算的证明，比如熟知的上三角矩阵、循环矩阵关于乘法封闭，用基础矩阵来书写会变得简洁而优雅.

例 3.1 (*). 设 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 $n\times n$ 阶矩阵，且只有 (i,j) 元为 1，其余位置元素均为 0，证明：

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}=\delta_{jk}\boldsymbol{E}_{il}=\begin{cases}\boldsymbol{E}_{il}, & j=k,\\ \boldsymbol{O}, & j\neq k.\end{cases}$$

例 3.2 (*). 证明：上 (下) 三角矩阵关于矩阵乘法封闭，即相乘仍为上 (下) 三角矩阵.

例 3.3 (*). 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**幂零矩阵**，如果存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶上三角矩阵且主对角线上元素全为零，证明：$\boldsymbol{B}$ 为幂零矩阵.

例 3.4 (*). 证明：循环矩阵关于矩阵乘法封闭，即相乘仍为循环矩阵.

例 3.5 (**). 证明：可逆循环矩阵的逆矩阵仍为循环矩阵，并求 $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n&1&\cdots&n-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&3&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}$.

3.2 矩阵的运算与行列式

3.2.1 利用矩阵乘法拆分

导言 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，这个结论可以用来简化某些行列式的计算，方法是通过将要计算的行列式通过矩阵乘法化为两个容易计算的行列式之积，再分别计算出两个行列式，将结果求积即可.

例 3.6 (*). 分解下面这个矩阵从而计算行列式：

$$\begin{pmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{pmatrix}.$$

例 3.7 (*). 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1)$，$s_0 = n$，分解下面这个矩阵从而计算行列式：

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

3.2.2 降阶法

导言 这部分的核心结果来自于下面第一个例题，起源是利用分块矩阵作第一、三初等变换行列式不改变，因此可以适当“打洞”，化为上 (下) 三角分块矩阵，从而方便计算.

降阶法有时在计算行列式的时候，往往会遇到矩阵不可逆的情况，那么这里我们就需要借助扰 (摄) 动法，去用一系列可逆的矩阵“连续逼近”原矩阵.

例 3.8 (*). 若 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{D}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $n \times m$ 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \left|\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|.$$

若 $\boldsymbol{D}$ 可逆 (这时不必假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆)，则有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left|\boldsymbol{D}\right| \left|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\right|.$$

例 3.9 (*). 计算矩阵的行列式：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$

例 3.10 (**). 设 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ ，求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式.

例 3.11 (*). 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{P}^{n\times 1}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=3$，计算 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}|$.

例 3.12 (*). 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times m}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{m\times n}$，$\lambda\neq 0$，证明：$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$.

例 3.13 (**). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，求证：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

例 3.14 (*). 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{P}^{n\times 1}$，证明：$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}|=|\boldsymbol{A}|-\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}$.

例 3.15 (*). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，证明：$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

例 3.16 (**). 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{m\times m}$，求分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

3.3 矩阵的秩

3.3.1 一些直接的秩不等式

定理 3.17 (*). 秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq$ 秩$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\leq$ 秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})$.

定理 3.18 (*). 秩$(\boldsymbol{AB})\leq\min\{$秩$(\boldsymbol{A}),$秩$(\boldsymbol{B})\}$.

3.3.2 利用分块矩阵解决秩的问题

导言 利用作分块初等变换不改变矩阵的秩这一特性，化为三角形分块矩阵的秩问题，这个就可以直接借助下面两个例题得到结果.

例 3.19 (*). 证明：秩 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=$ 秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})$.

例 3.20 (*). 证明：$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\geq$ 秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})$ ，秩 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\geq$ 秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})$.

例 3.21 (Sylvester 不等式)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times t$ 矩阵, 求证: 秩$(\boldsymbol{AB})\geq$ 秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})-n$.

例 3.22 (Frobenius 不等式)**.** 证明：秩$(\boldsymbol{ABC}) \geq$ 秩$(\boldsymbol{AB}) +$ 秩$(\boldsymbol{BC}) -$ 秩$(\boldsymbol{B})$.

例 3.23 (**)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，求证：秩$(\boldsymbol{A}^n) =$ 秩$(\boldsymbol{A}^{n+1}) =$ 秩$(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \cdots$.

例 3.24 (*)**.** 证明：$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$ 的充要条件为 秩$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) +$ 秩$(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}) = n$.

例 3.25 (**)**.** 设 $k \in \mathbb{N}^*$，证明：$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{I}_n$ 的充要条件为 秩$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) +$ 秩$(\boldsymbol{I}_n + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}) = n$.

例 3.26 (*)**.** 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times m}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{m\times n}$，$\lambda \neq 0$，证明：$m +$ 秩$(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}) = n +$ 秩$(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA})$.

例 3.27 (**)**.** 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times m}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{m\times n}$，证明：对任意 $k \in \mathbb{N}^*$，有

$$m + \text{秩}((\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^k) = n + \text{秩}((\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{BA})^k),$$

例 3.28 (矩阵的秩的降阶公式)**.** 分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求证：

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}) + \text{秩}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}) = \text{秩}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

例 3.29 (***)**.** 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$ 的秩的所有可能值.

3.3.3 线性方程组与秩的关系

导言 这部分内容的核心问题就是利用方程同解，从而基础解系相同，导出秩相同.

例 3.30 (*)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times k$ 矩阵，证明方程组 $\boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}$ 和方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是 $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{B})$.

例 3.31 (*)**.** 证明：对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$，$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}) = r(\boldsymbol{AA}^\mathsf{T}) = r(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A})$.

例 3.32 (*)**.** 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{P}^{n\times 1}$，证明：线性方程组 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{\beta}$ 一定有解.

3.4 相抵标准型与应用

导言 这部分内容往往技巧性很强，特别是在构造矩阵的分解上，这需要一定的直觉，并且有时需要创造性地“裂开”一些矩阵，如果觉得困难是正常的，可以多积累题目逐渐熟悉. 另一类题目往往需要数学归纳法，在后面的学习中，利用数学归纳法去得到一些矩阵的分解是很强大的方法.

例 3.33 (**)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，证明：

(1) 若 秩$(\boldsymbol{A}) = n$，即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵，则必存在秩等于 n 的 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$；

(2) 若 秩$(\boldsymbol{A}) = m$，即 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵，则必存在秩等于 m 的 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I}_m$.

例 3.34 (**). 设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，证明：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 的后 $n-r$ 行全为 0.

例 3.35 (**). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbb{P}^{n\times n}$. 如果矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 的秩与 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等，证明: 存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$, 使得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{UAV}$.

例 3.36 (***). 求证：秩$(\boldsymbol{AB})$ = 秩$(\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{B})-n\Leftrightarrow$ 秩$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ = 秩$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\exists\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{I}_n$.

例 3.37 (**). 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，证明：存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

例 3.38 (三角分解).** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵，证明：存在上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和对角元为 1 的下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均不为 0，且上述分解式中 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}$ 唯一.

例 3.39 (***). 交换 n 阶单位方阵两行得到的方阵称为**对换方阵**，对换方阵的乘积称为**置换矩阵**. 证明：对于任意 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$，存在置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{LU},$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是对角元为 1 的下三角矩阵，$\boldsymbol{U}$ 是上三角矩阵.

例 3.40 (***). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，若 秩$(\boldsymbol{ABA})$ = 秩$(\boldsymbol{B})$，求证: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{PBA}.$$

4 补 (le) 充 (zi) 题

例 4.1 (**). 令 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_r^T\end{pmatrix}$. 若 秩$(\boldsymbol{M})=r$，$\boldsymbol{Mx}=0$ 的基础解系中含有 $n-r$ 个向量, 分别记作 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 线性无关.

例 4.2 (**). 设 $f(x)$ 为 n 次首一多项式，求

$$\begin{vmatrix}f(0)&f(1)&\cdots&f(n)\\f'(0)&f'(1)&\cdots&f'(n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f^{(n)}(0)&f^{(n)}(1)&\cdots&f^{(n)}(n)\end{vmatrix}.$$

例 4.3 (**). 给定非零实数 a 及 n 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 记

$$\mathcal{S}=\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})|\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{XY}=a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\},$$

证明：任取 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\in\mathcal{S}$，必有 $\boldsymbol{XN}+\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}}\neq\boldsymbol{O}$.

例 4.4 (***). 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=$秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})$，证明：

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$

例 4.5 (***). 设矩阵 $\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_k$ 是 n 阶幂等矩阵，即有 $\boldsymbol{B}_i^2=\boldsymbol{B}_i(1\le i\le k)$，又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_k$，证明：

$$\text{秩}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\le k(n-\text{秩}(\boldsymbol{A})).$$

例 4.6 (***). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明:

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geqslant\text{秩}(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})+\text{秩}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}-\text{秩}(\boldsymbol{A})-\text{秩}(\boldsymbol{B}).$$

例 4.7 (**). 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\mathsf{T}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$，证明: $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^\mathsf{T}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\right)$.

例 4.8 (**). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 分别是 $m\times n$ 阶和 $k\times l$ 阶矩阵，定义他们的 *Kronecker* 积为一个 $mk\times nl$ 阶矩阵：

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}\boldsymbol{B}&a_{12}\boldsymbol{B}&\cdots&a_{1n}\boldsymbol{B}\\ a_{21}\boldsymbol{B}&a_{22}\boldsymbol{B}&\cdots&a_{2n}\boldsymbol{B}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{B}&a_{m2}\boldsymbol{B}&\cdots&a_{mn}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

证明：矩阵关于 *Kronecker* 积满足如下九条性质：

1. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$;
2. $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$;
3. $(k\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\otimes(k\boldsymbol{B})$;
4. $\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_{mn}$;
5. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\otimes(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D})$;
6. $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})$;
7. 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 也是可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}$;
8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|^m$;
9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 秩$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=$秩$(\boldsymbol{A})\cdot$秩$(\boldsymbol{B})$.

例 4.9 (**). 设矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 是 n 阶幂等矩阵，且任意 $1\le i<j\le k$，有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=-\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i$，证明：$\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 中一定存在一个矩阵，其秩不超过 $\dfrac{n}{k}$.