NKU 数学分析补充题参考解答

作者: NKU M.m. Kay

Preface

本书是南开大学李军老师给出的数学分析补充题的部分解答，题目难度较高，但都具有非常高的价值，鉴于工作量仅给出参考解答，相对容易试题给出提示或答案，相当困难的问题如果笔者找到来源会附上相关链接，当然更多题目笔者也无法寻找到出处或做法，欢迎交流指正.

笔者联系方式 QQ：308655003，欢迎批评斧正！

2022 年寒假

NKU M.m. Kay

贴着地面步行，不在云端跳舞

目录

Chapter 1

数学分析 I

1.1 补充题 1

1.1.1 A 组题目

Problem: 1

问题 1

证明. 我们先证明 g 是双射，从两方面考虑:
①对 $\forall z \in Z$，存在 $x \in X$ 使得 $g \circ f(x) = z$，则存在 $y = f(x) \in Y$ 使得 $g(y) = z$，即 g 是满射;
②对 $\forall x_1 \neq x_2$ 且 $x_1, x_2 \in X$，均有 $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$，从而一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，即 g 是单射.
从而我们类似可证明 h 是双射，而对于 f，我们记 $\sigma = g \circ f$，从而 $f = g^{-1} \circ \sigma$ 为满射.
即证. □

(只需要基本概念运用即可)

Problem: 2

问题 2

证明. 我们按如下方式证明:
(1) $\iff$ (2) : 这是平凡的，略去;
(1) $\iff$ (3) : 若 f 为单射, 则一方面由 $A \bigcap B \subset A, B$, 显然有 $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$; 另一方面有任意 $y \in f(A), y \in f(B)$ 则 $x = f^{-1}(y) \in A \bigcap B$，从而 $f(A) \bigcap f(B) \subset f(A \bigcap B)$，故 $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$.
若 $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$ 但 f 不为单射，则存在 $x_1 \neq x_2$，但 $f(x_1) = f(x_2)$，从而我们考虑 X 的两个单元素集 $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$ 即知矛盾!
此情况得证.
而我们容易证明 (4) $\iff$ (3) $\iff$ (1)，下面我们考虑去证明 (4) $\iff$ (5) :
若 (4) 成立，则考虑 $B' = A \setminus B$，则有 $B' \bigcap B = \varnothing$，从而 $f(B') \bigcap f(B) = \varnothing$，又显见 $f(B') \bigcup f(B) = f(A)$，则有 $f(A \setminus B) = f(B') = f(A) \setminus f(B)$;
若 (5) 成立, 则考虑 $B'' = X \backslash B$, 故 $f(B'') = f(B'' \backslash B) = f(B'') \backslash f(B)$, 从而 $f(B'') \bigcap f(B) = \varnothing$ 而由 $A \subset B''$，知 $f(A) \subset f(B'')$ 则显然有 $f(A) \bigcap f(B) = \varnothing$;
此情况也得证，综上得证! □

(稍有技巧性的是 *(4)(5)* 中 *B'* 与 *B"* 的构造)

Problem: 3

问题 3

证明. 平凡略去

□

(如果笔者理解有误请联系笔者)

Problem: 4

问题 4

证明. 注意到下面式子成立:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_k \ln \frac{q_k}{p_k} &= \sum_{k=1}^{n} p_k \ln\left(\frac{q_k - p_k}{p_k} + 1\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \left(\frac{q_k - p_k}{p_k}\right) = 0\end{aligned}$$

□

(非常 *trival* 的高考难度不等式)

Problem: 5

问题 5

证明. 注意到

$$x^k + x^{2n-k} \geq 2x^n (0 \leq k \leq 2n)$$

相加即证.

□

(另一道非常 *trival* 的高考难度不等式)

Problem: 6

问题 6

证明. 注意到 $mb_k \leq a_k \leq Mb_k (1 \leq k \leq n)$ 相加即证.

□

(非常 *trival* 的中考难度不等式)

Problem: 7

问题 7

证明. 我们考虑 $b_n = n!a_n$，则有

$$b_n \leq \frac{1}{n} b_{n-1} + \frac{n-1}{n} b_{n-2}$$

从而取 $C = \max\{a_1, 2a_2\}$，则归纳可证任意 $n \in \mathbb{N}$，有 $b_n \leq C$，即证. □

(容易题)

Problem: 8

问题 8

证明. 此即 Bernouil 不等式，采用数学归纳法可以很轻松得到证明，略去. □

(容易题)

Problem: 9

问题 9

证明. 我们熟知 Cauchy 不等式以及等式 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n - 1$，从而:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mathrm{C}_n^k} &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k} \\
&= \sqrt{n(2^n - 1)}
\end{aligned}$$

即证. □

(容易题)

Problem: 10

问题 10

证明. 注意到:

$$\begin{aligned}\frac{1+f(2x)}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k\left(1+\cos\left(2\beta_k x\right)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\cos^2\left(\beta_k x\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\cos\left(\beta_k x\right)\right)^2 = f^2(x)\end{aligned}$$

即证. □

(容易题)

1.1.2 B 组题目

Problem: 1

问题 1

证明. 注意到:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n &= \left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}+\frac{a_n}{n}\right)^n \\ &\geq \left(\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\cdot a_n^{\frac{1}{n}}\right)^n \\ &= a_n\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

即证. □

(加权均值不等式的应用)

Problem: 2

问题 2

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} &\leq \left(\sum_{k\equiv 0(\bmod 2)} a_k\right)\left(\sum_{k\equiv 1(\bmod 2)} a_k\right)\\ &\leq \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

即证.

□

Remark.
事实上我们可以把 *n-1* 加强为 n，此时需分奇偶性来讨论证明，偶数完全类似，奇数则需选取最大元来修改证明.

(经典结论，*CGMO* 与 *2020* 高联均考察过)

Problem: 3

问题 3

证明. 由 Bernouil 不等式知:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1+a$$

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) > 1-a$$

而另一方面我们容易观察到

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)(1-a_k) = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k^2) < 1$$

从而我们断言结论成立.

□

(*Bernouil* 不等式简单运用，注意使用条件)

Problem: 4

问题 4

证明. 利用微分学知识，我们可以借助 Jesen 不等式证明此题：注意到 $\ln(1+x)$ 是定义在 $(-1,+\infty)$ 的上凸函数，从而有

$$\frac{\ln(1+a_1)+\cdots+\ln(1+a_n)}{n}\leq \ln\left(1+\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)$$

也即

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)\leq\left(1+\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{S}{n}\right)^n$$

而

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{S}{n}\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{C}_n^k}{n^k}\right)S^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{S^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{S^k}{k!}\end{aligned}$$

其中放缩利用了 $S\geq 0$. □

Remark.

本题若取 $a_k=\dfrac{1}{n}$，则可以得到关于自然对数 e 建立过程中产生的一个基本不等式. 当然本题第一个不等式也可以用数学归纳法去证明 (如果考虑存在循环论证可能性的话)

(*巧用 Jesen 不等式，化散为全体*)

Problem: 5

问题 5

证明. 一方面:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+n &= \frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}\\ &\geq n\sqrt[n]{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}} = n\sqrt[n]{n+1}\end{aligned}$$

从而即证

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)$$

另一方面:

$$\begin{aligned}n-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{n+1} &= \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\\ &\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}\end{aligned}$$

从而即证

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

□

(利用均值不等式这样得到的估计可以用在极限理论)

Problem: 6

问题 6

证明. 注意到:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n}b_k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha}a_k^2+\frac{\alpha}{4}b_k^2\right)\\ &\geq \sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\\ &\geq \left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\end{aligned}$$

即证. □

(容易题)

Problem: 7

问题 7

证明. 归纳容易证明 $x_n < 2$，从而设 $x_n = 2\cos y_n \left(y_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$，则有 $y_1 = \frac{\pi}{4}$
从而
$$\cos y_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{2+x_n}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos y_n}{2}} = \cos\frac{y_n}{2}$$
故有 $y_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$，即 $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$
从而由微分学的方法可以证明：
$$1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$$
从而代入即证
$$0 < 2 - x_n < \frac{\pi^2}{2^{2n+2}}$$
□

(一类特殊递推形式的三角换元)

Problem: 8

问题 8

证明. 我们考虑二次函数
$$f(\lambda) = \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)\lambda^2 - \frac{n(m+M)}{\sqrt{mM}}\lambda + (a_1 + \cdots + a_n)$$
从而：
$$\begin{aligned} f(\sqrt{mM}) &= \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)mM - n(m+M) + (a_1 + \cdots + a_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(M-a_k)(m-a_k)}{a_k} \le 0 \end{aligned}$$
从而函数在 $\mathbb{R}$ 上有零点，即判别式
$$\Delta = \frac{(m+M)^2}{mM}n^2 - 4(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \ge 0$$
即证
$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \le \frac{(m+M)^2}{mM}n^2$$
□

(此即康托洛维奇不等式，其也具有积分形式)

Problem: 9

问题 9

证明. 注意到原不等式等价于证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}\geq\frac{n^2P}{S+nP}$

而由 Cauchy 不等式以及 $0<a_k\leq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}\geq\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1+a_k}{a_k}}=\frac{n^2P}{nP+\sum_{k=1}^{n}\prod_{l\neq k}a_l}\geq\frac{n^2P}{nP+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}}=\frac{n^2P}{nP+S}$$

□

(*Cauchy* 求反的经典操作)

Problem: 10

问题 10

证明. 我们熟知 Lagrange 恒等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

以及绝对值不等式

$$|a_i-a_j|\leq|a_i-a_{i+1}|+\cdots+|a_{j-1}-a_j|\leq|i-j|\,\Delta$$

从而一方面由 Cauchy 不等式知左边显然成立，下证不等式右边:

$$\begin{aligned}n\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2&=\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2\\&\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}(i-j)^2\Delta^2\\&=\Delta^2\sum_{k=1}^{n}(n-k)k^2\\&=\Delta^2\left(n\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^3\right)=\frac{n^2(n^2-1)}{12}\Delta^2\end{aligned}$$

即证. □

(本质上考察了对 *Lagrange* 恒等式的应用)

1.2 补充题 2

1.2.1 A 组题目

Problem: 1-(1)

问题 1-(1)

解. 注意到 $\arcsin x - x$ 单调递增，则有对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt[n]{2}} - \frac{1}{\sqrt[n]{2}} < \frac{\pi}{2} - 1 < 1$$

从而有

$$0 < \prod_{k=1}^{n} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt[k]{2}} - \frac{1}{\sqrt[k]{2}} \right) < \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)^n$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt[k]{2}} - \frac{1}{\sqrt[k]{2}} \right) = 0$

□

(遇到形式复杂的极限往往可以用夹逼定理简化)

Problem: 1-(2)

问题 1-(2)

解.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} (e - 1)}{n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)} = e - 1$$

□

Remark.
有一个和这个答案类似的困难题，计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^n}$$

(容易题与困难题只有一线之隔)

Problem: 1-(3)

问题 1-(3)

解.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{nk}}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}=2\end{aligned}$$

□

(容易题)

Problem: 1-(4)

问题 1-(4)

解.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi^2}{4}x^2}{\frac{\pi}{2}\left(1-\cos x\right)}=\pi$$

□

(容易题)

Problem: 1-(5)

问题 1-(5)

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\cos x}-\mathrm{e}^{x}}{x\ln\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x(\cos x-1)}-1}{x\left(1-\cos x\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\cos x-1\right)}{x\left(1-\cos x\right)}=-1\end{aligned}$$

□

(容易题)

Problem: 2

问题 2

证明. 注意到 $\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{a}{x_n}+1$，从而对 a 分三类情况讨论即可，相当容易. □

（容易题）

Problem: 3

问题 3

证明. 设 $y_n=x_n-1$，则有

$$y_{n+1}=\frac{y_1}{2^1}+\cdots+\frac{y_n}{2^n}$$

从而归纳可证：$|y_n|\le|y_1|$，简要理由如下：

$$\begin{aligned}|y_{n+1}|&=\left|\frac{y_1}{2^1}+\cdots+\frac{y_n}{2^n}\right|\\&\le\left(\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)|y_1|<|y_1|\end{aligned}$$

不妨假设 $y_1>0$(若为 0 则平凡，若小于 0 则类似), 从而 $y_n>0$，故 $\{y_n\}_{n\ge2}$ 单调增，又有上界 y_1，从而收敛.

□

（容易题）

Problem: 4

问题 4

证明. 注意到

$$x_{n+1}-x_n=\frac{y_n-x_n}{2}$$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n-y_n}{3}$$

故有 $x_{n+1}-x_n=-\dfrac{3}{2}(y_{n+1}-y_n)$，累加可得 $x_n=-\dfrac{3}{2}(y_n-1)$，从而有可得两个数列的递推公式为：

$$x_{n+1}=\frac{1}{6}x_n+\frac{1}{2}$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{6}y_n+\frac{1}{2}$$

从而第 (1) 问显然，第 (2) 问利用一阶线性递推可得极限为 $-\dfrac{1}{10}$ □

（容易题）

Problem: 5

问题 5

证明. 证法 *1(本质观点)*

由于 $\left\{\left\{n\dfrac{\theta}{2\pi}\right\}\middle| n\in\mathbb{N}^*\right\}$ 当 $\theta\neq 0$ 且 $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 为无理数时在 $[0,1)$ 上稠密，此时不收敛；而 $\theta\neq 0$ 且 $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 为有理数时，数列为周期非常值数列，从而也不收敛，故只有 $\theta=0$. □

证明. 证法 *2*

Case I. 若 $\theta=0$，则结论平凡成立；

Case II. 若 $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 为非零有理数 $\dfrac{q}{p}$，则数列有周期 $2p(p>0)$，且不为常值，则不收敛；

Case III. 若 $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 为无理数，则我们不妨考虑 $\theta\in(0,\pi)$，则存在 $\varepsilon_0=2\cos\dfrac{\theta}{2}$，且开区间

$$\left(\frac{2k\pi-\frac{1}{2}\theta}{\theta},\frac{2k\pi+\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right),\left(\frac{\pi+2k\pi-\frac{1}{2}\theta}{\theta},\frac{\pi+2k\pi+\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)$$

分别存在正整数 n_k,m_k，但有

$$|\cos n_k\theta-\cos m_k\theta|=\cos n_k\theta-\cos m_k\theta>2\cos\frac{\theta}{2}=\varepsilon_0$$

从而由 Cauchy 收敛原理知不收敛.

综上即证. □

(抛开本质观点，如何选取子列是一个并不容易的事情)

Problem: 6

问题 6

证明. 利用数列的 Cauchy 收敛以及函数在 a 右侧的 Henie 定理立刻推出结论成立，相当容易. □

(本质是压缩映射原理)

Problem: 7

问题 7

证明. 令 $a=0$，从而由 $f(x)$ 是偶函数知:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0)$$

从而任取实数 a，则有

$$f(a) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}(f(a+x)+f(a-x)) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}(x) + \lim_{x\to-\infty}(x)\right) = f(0)$$

从而 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的常数函数. □

（更换主元的想法，容易题）

Problem: 8

问题 8

证明. 反证法，若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq -\infty$，即存在 $M<0$，使得任意 $X>0$，存在 $x\in\mathbb{R}$ 且 $|x|>X$，$f(x)>M$

这表明，存在 $M'=g(M)$，使得使得任意 $X>0$，存在 $x\in\mathbb{R}$ 且 $|x|>X$，$g(f(x))>g(M)=M'$(利用 $g(x)$ 单调递增)，这与 $\lim\limits_{x\to\infty} g(f(x)) = -\infty$ 矛盾!

即证. □

（考察概念，容易题）

Problem: 9

问题 9

证明. 必要性由 Henie 定理与 Stolz 定理知显然;

再考虑充分性，反证法，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq A$，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及递增到正无穷的数列 $\{x_n\}$ 使得总有

$$|f(x_n)-A| \geq \varepsilon_0 (n\in\mathbb{N}^*)$$

从而不妨设存在递增到正无穷的无穷子列 $\{x_{n_k}\}$，使得有 $f(x_{n_k}) \geq A+\varepsilon_0 (n\in\mathbb{N}^*)$，故有任意 $k\in\mathbb{N}^*$，

$$\frac{f(x_{n_1})+\cdots+f(x_{n_k})}{k} \geq A+\varepsilon_0$$

与 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_1})+\cdots+f(x_{n_k})}{k} = A$ 矛盾! 综上即证. □

（考察概念，容易题）

Problem: 10

问题 10

解. 不一定，反例见下：

构造 $f_1(x) = \begin{cases} -x+1(x>0) \\ x+1(x<0) \end{cases}$ ，$f_2(x) = \begin{cases} \ln(\mathrm{e}-x)(x>0) \\ \ln(\mathrm{e}+x)(x<0) \end{cases}$ ，$g_1(x) = g_2(x) = \dfrac{1}{|x|}$.

则

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{\ln f_1(x)}{\ln f_2(x)} = \mathrm{e}$$

从而

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)^{g_1(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln f_1(x)}{|x|}} = \mathrm{e}^{-1}$$

$$\lim_{x\to 0} f_2(x)^{g_2(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln f_2(x)}{|x|}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

□

(关键在于 $\ln f(x)$ 的极限比值不一定是 *1*)

1.2.2 B 组题目

Problem: 1-(1)

问题 1-(1)

解.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln n \ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} (\ln n)\left(\frac{x_n - y_n}{y_n}\right)}$$

而

$$x_n + y_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma_{2n}$$

$$y_n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \cdot (\ln n + \gamma_n)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n) \left(\frac{x_n - y_n}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2 + \gamma_{2n} - \gamma_n)\ln n}{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma_n)} = \ln 4$$

故 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\ln n} = 4$ □

(关键在于用 *Euler* 常数进行调和级数与 $\ln n$ 的转换)

Problem: 1-(2)

问题 1-(2)

解. 注意到
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+n^{\alpha}}<x_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}$$
即
$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}}<x_n<\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$$
从而
$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$
□

(利用夹逼定理处理复杂形式)

Remark.
一个与本题类似但困难很多的问题：设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha>\max\{0,2-\beta\}$，则有
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}+k^{\beta}}=0$$

Problem: 1-(3)

问题 1-(3)

解. 先证明:
$$\frac{1}{2}\ln(2n-3)<x_n<\frac{1}{2}\ln(2n-1)$$
注意到 $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$，则取 $x=\dfrac{2k-1}{2k+1}$，有 $\dfrac{1}{2k+1}\leq\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2k+1}{2k-1}\right)$
注意到 $\ln(1-x)\leq 1-\dfrac{1}{x+1}$，则取 $x=\dfrac{2}{2k-1}$，有 $\dfrac{1}{2k+1}\geq\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2k-3}{2k-1}\right)$
从而有
$$\frac{2n-3}{2n+1}<\frac{\mathrm{e}^{2x_n}}{2n+1}<\frac{2n-1}{2n+1}$$
故有
$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{2x_{n+1}}-\mathrm{e}^{2x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2x_n}\left(\mathrm{e}^{2x_{n+1}-2x_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{2x_n}}{2n+1}=2$$
从而极限值为 2. □

(利用夹逼定理处理复杂形式另一例)

Problem: 2

问题 2

证明. 因为 $a_1 > 2$，从而存在正实数 $\alpha > 1$ 使得 $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = a_1$，故归纳易证明:

$$a_n = \alpha^{2^{n-1}} + \frac{1}{\alpha^{2^{n-1}}}$$

从而有

$$a_1 \cdots a_k = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdots \left(\alpha^{2^{k-1}} + \frac{1}{\alpha^{2^{k-1}}}\right) = \frac{\alpha^{2^k} - \dfrac{1}{\alpha^{2^k}}}{\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}$$

则

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} &= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\alpha^{2^k} + 1\right) - 1}{\left(\alpha^{2^k} - 1\right)\left(\alpha^{2^k} + 1\right)} \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha^{2^k} - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{k+1}} - 1}\right) \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{n+1}} - 1}\right)
\end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha^2 - 1}\right) = \frac{1}{\alpha} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$$

即证. □

(相当有难度的题目，包含三个非常具有技巧性的代数变形，难度相当大)

Problem: 3

问题 3

解. 不收敛，理由如下：

一方面：存在正整数 $n_k \in \left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$，从而考虑子列

$$\left\{\frac{1}{n_k \sin n_k}\right\}$$

则由于

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n_k \sin n_k} < \frac{1}{n}$$

故

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k \sin n_k} = 0$$

另一方面：下面证明存在子列不收敛于 0.

因为 π 是无理数，从而由 Dirichlect 定理知，存在无穷多个有理数 $\frac{q}{p}$，使得 $\left|\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$，从而也即 $|p - q\pi| < \frac{1}{q}$，那么我们断言存在 $\varepsilon_0 = \frac{1}{\pi+1}$，使得任意 $N \in \mathbb{N}$，存在 $p > N$ 使得

$$|p\sin p| \leq \left|p\sin\frac{1}{q}\right| \leq \frac{p}{q} < \pi + \frac{1}{q^2} \leq \pi + 1$$

故有

$$\left|\frac{1}{p\sin p} - 0\right| > \frac{1}{\pi+1} = \varepsilon_0$$

则存在子列不收敛于 0；

综上我们证明了数列不收敛. □

(对于数列极限有时需要用一些逼近理论辅助处理)

Problem: 4

问题 4

证. 当$a_n=1$时，$a_{n+1}=0$; 当$a_n=0$时，$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$. 因此，若数列$\{a_n\}$的某一项等于1或0, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 下面假设数列$\{a_n\}$的每一项都不等于0或1.

若$a_1\in(-1,0)$, 则$a_2\in(0,2)$, 故不妨设$a_1>0$. 下面证明存在正整数n_0, 使得$a_{n_0}\in(0,1)$. 反证. 若不然，则$a_n\in(1,2)$, $n=1,2,\cdots$. 这时，$a_{n+1}=a_n(a_n-1)<a_n$, $n=1,2,\cdots$, 由单调收敛定理知$\{a_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 则$A\in[1,2)$. 在$a_{n+1}=a_n^2-a_n$两边令$n\to\infty$取极限，得$A=A^2-A$, 解得$A=0$或$A=2$, 与$A\in[1,2)$矛盾！

由$a_{n_0}\in(0,1)$知不妨设$a_1\in(0,1)$. 于是$a_2\in\left[-\frac{1}{4},0\right)$, 进而$a_3\in(0,1)$. 用数学归纳法不难证明$a_{2k-1}\in(0,1)$, $a_{2k}\in\left[-\frac{1}{4},0\right)$, $k=1,2,\cdots$. 注意到$0<\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=1-2a_n^2+a_n^3<1$, 就可见数列$\{a_{2k-1}\}$严格递减，数列$\{a_{2k}\}$严格递增. 由单调收敛定理知数列$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛. 设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=B$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=C$, 则$B\geqslant0$, $C\leqslant0$. 在$a_{2k+1}=a_{2k}^2-a_{2k}$两边令$n\to\infty$取极限，得$B=C^2-C$; 在$a_{2k}=a_{2k-1}^2-a_{2k-1}$两边令$n\to\infty$取极限，得$C=B^2-B$. 于是$B^2=B+C=C^2$, 结合$B\geqslant0$, $C\leqslant0$得$B=-C$, 从而$B^2=0=C^2$, 即$B=C=0$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(蛛网工作法寻找 a_n 的规律并用归纳法加以证明，其中发现最终存在 $a_n\in(0,1)$ 是关键)

Problem: 5

问题 5

解. $\{x_n\}$ 收敛，理由如下：
考虑数列递推的特征方程

$$f(x)=x^m-p_mx^{m-1}-\cdots-p_2x-p_1$$

从而一方面显见 1 是 $f(x)$ 的根，且 $f'(1)=m-\sum_{k=2}^m(k-1)p_k>m-\sum_{k=2}^m mp_k=mp_1>0$, 故有 1 是单重根.
而另一方面，对其他任意不为 1 的复根 z 有 $|z|<1$，若不然设存在复根使得 $|z|>1$，则

$$|z|^m=\left|p_mz^{m-1}+\cdots+p_1\right|<p_m|z|^{m-1}+\cdots+p_1<|z|^{m-1}$$

矛盾！从而设方程有 $k+1$ 个不同的根 $1,z_1,\cdots,z_k$，故数列的通项公式可以写作：

$$x_n=C+\sum_{l=1}^k P_l(n)z_l^n=C+\sum_{l=1}^k\left(P_l(n)\cos n\theta_l\right)|z_l|^n\longrightarrow C$$

其中 $P_l(n)$ 为关于 n 的多项式，且上式中用到了 De-Morve 公式及 x_n 是实数，故数列收敛. □

(利用特征根法直接从通项的角度解决)

Problem: 6

问题 6

证明. 我们先证明一个引理:

Lemma: 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，存在实数 C_λ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{n^\lambda}=C_\lambda$$

注意到:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{n^\lambda}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda\ln n}}\\&=\mathrm{e}^{\lambda\gamma}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}\\&=\mathrm{e}^{\lambda\gamma}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{\lambda}{k}}{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{k}}}\right)\end{aligned}$$

其中 γ 为 *Euler* 常数，故考虑 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)-\frac{\lambda}{k}\right)$，则显见 $\{x_n\}$ 单调递减，且由

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)-\frac{\lambda}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\lambda^2}{k^2}+o\left(\frac{\lambda^2}{k^2}\right)\right)$$

知其收敛于一常数 C_λ'，从而存在 $C_\lambda=\mathrm{e}^{\lambda\gamma+C_\lambda'}$，引理得证，回到原题:

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得任意 $n>N$，有 $1+\frac{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}{n}>0$，$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\lambda-\frac{\varepsilon}{2}$，且有

$$\frac{\left(1+\frac{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}{n}\right)}{n^{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}}>\frac{C}{2}$$

从而存在正常数 M 使得

$$\left|\frac{a_N}{n^{\lambda-\varepsilon}a_{n+1}}\right|>\frac{\left(1+\frac{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}{N}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}{n}\right)}{n^{\lambda-\varepsilon}}>Mn^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

故存在 M' 使得 $\left|n^{\lambda-\varepsilon}a_{n+1}\right|<M'n^{-\frac{\varepsilon}{2}}$，即有 $\lim_{n\to\infty}n^{\lambda-\varepsilon}a_n=0$. □

(复杂题，思路并不困难，难在对阶的清晰估计)

Problem: 7

问题 7

证明. 记 $q=p-1>0$，注意到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)=0$$

从而记 $M_n=\max\limits_{1\le i\le n}a_i$，且设 $a_{K_{(n)}}=M_n(1\le K(n)\le n)$，从而显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=0$.
故有

$$\begin{aligned}0<\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n^p}&=\frac{a_1\cdot a_1^q+\cdots+a_n\cdot a_n^q}{n\cdot n^q}\\&\le\left(\frac{M_n}{n}\right)^q\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\end{aligned}$$

故可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n^p}=0$$

即证. □

(关键在于发现 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$)

Problem: 8

问题 8

证明. 注意到 $(x+n)^2-1=(x+n-1)(x+n+1)(n\in\mathbb{N})$，从而：

$$\begin{aligned}1+x=\sqrt{1+2x+x^2}&=\sqrt{1+x\sqrt{1+((x+2)^2-1)}}\\&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+((x+3)^2-1)}}}\\&=\cdots\\&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-2)\sqrt{1+\left((x+n)^2-1\right)}}}}}\\&=\cdots\end{aligned}$$

从而无穷写下去可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+x$，即所求. □

(令 $x=2$ 就是著名的 *Ramanujan* 恒等式)

Problem: 8-Remark

关于嵌套根号求极限的相关材料

(类型 1) 可以写出递推关系型的嵌套根号

比如以下四个例子

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}}=\frac{\pi}{2},a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{n}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2},a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n-1}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}}}}=1,a_n=\sqrt{\frac{1}{n}+a_{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_1\sqrt{7+\varepsilon_2\sqrt{7+\cdots+\varepsilon_n\sqrt{7}}}=2(\varepsilon_{2k-1}=1,\varepsilon_{2k}=-1),a_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}$$

容易发现，如果嵌套式子是可以视为从最外层嵌套的话就很容易写出递推关系式，进而求极限，这是最简单的类型. 而联想第 *1* 个和第 *4* 个式子，笔者联想到另一个问题，作为补充 *(并不一定与类型一本质相关)*

从 (类型 1) 联想到的一个类似问题

定义数列

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^k}$$

其中 $\varepsilon_k\in\{-1,1\}\,(0\le k\le n)$，则有

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}c_n\right)=\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n}}}$$

证明及上述资料可参考美国数学月刊的论文：

https://arxiv.org/pdf/1208.3705.pdf?utm_source=wechat_session&utm_medium=social&utm_oi=1206856463207100416

(类型 2) 利用不等式放缩结合夹逼定理

这种方法往往只能求出少数极限，大多数情况只能够证明这样形式下去的极限存在，比如是下面两个经典例子

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\cdots+\sqrt[n]{n^p}}}=1$$

其中 p 为任意给定正整数，这个放缩相当宽松. 但下面这个例子只能放缩出一个上界从而证明收敛：*(下面这个式子证明可以移项平方后采用数学归纳法，移项后就消解了不能归纳的问题，这个比较有趣的想法来自蔡晨涛)*

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}<2$$

Problem: 8-Remark 续

(类型 2) 第二个例子的一般结论：Polya 收敛准则，Herschfeld 收敛准则与 Polya-Szego 不等式以及进一步的估计问题

<Polya 收敛准则 >

对于 $a_n > 0$，记

$$s_n = \sqrt[r]{a_1 + \sqrt[r]{a_2 + \cdots + \sqrt[r]{a_n}}}$$

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln(a_n)}{n} = a$，则当 $a < \ln r$ 时 $\{s_n\}$ 收敛，大于时发散，等于时法则失效.

证明可参考知乎文章：https://zhuanlan.zhihu.com/p/97966928

<Herschfeld 收敛准则 >

对于 $a_n > 0$，记

$$t_n = \sqrt[m_1]{a_1 + \sqrt[m_2]{a_2 + \cdots + \sqrt[m_n]{a_n}}}$$

则上数列收敛的充要条件为 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n^{m_1 m_2 \cdots m_n} < +\infty$

证 明 可 参 考 知 乎 文 章：https://www.zhihu.com/question/363335495/answer/952968558关 于 上 述 两 个 判 别 法 更 进 一 步 的 理 论 可 参 阅 文 献：https://arxiv.org/pdf/1907.02700.pdf

<Polya-Szego 不等式 >

分别记

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$$

$$U_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n + r_n}}} (r_n \geq 0)$$

则有下面不等式成立：

$$U_n - u_n \leq \frac{r_n}{2^n \sqrt{a_n}\sqrt{a_{n-1}} \cdots \sqrt{a_1}}$$

关于这个结论及其他更进一步的理论可参阅文献：

https://is.muni.cz/el/1431/jaro2015/M7400/um/2301294_147_251_4_41_15_08_2014_19_16.pdf

< 进一步的估计问题 >

在类型 2 中已经可以得到数列收敛，那么记极限值为 τ，那么有结论：$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sqrt[n]{\tau - a_n} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$

证明可参考知乎回答：

https://www.zhihu.com/question/438080388?utm_source=wechat_session&utm_medium=social&utm_oi=1206856463207100416&utm_content=group2_supplementQuestions&utm_campaign=shareopn

(类型 3) 利用 Ramanujan 的思想构造根号

一个例子是问题 8，下面模仿这个题解决下面这个极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \cdots + \sqrt{4^{n-1} + \sqrt{4^n}}}} = 3$$

证明可参考知乎回答：

https://www.zhihu.com/question/441973231/answer/1705838446?utm_source=wechat_session&utm_medium=social&utm_oi=1206856463207100416&utm_content=group3_Answer&utm_campaign=shareopn

Problem: 9

问题 9

解. 注意到

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$$

从而由 Riemann 重排定理可知命题成立.

□

Remark.
关于 Riemann 重排定理的证明，主要利用了级数发散于正无穷，从而不断加一部分，减一部分以缩小与待求极限的差距，这里不给出完整证明，可参考教材级数理论部分内容.

(*Riemann 重排定理*)

Problem: 10

问题 10

解. (1) 显而易见 $f(x)=\ln x$ 即符合要求；
(2)

□

(*Riemann 重排定理*)

Problem: 11

问题 11

证明. □

(*Riemann 重排定理*)

1.3 补充题 3

1.3.1 A 组题目

Problem: 1

问题 1

解. 函数的全体间断点为 $\pm\sqrt{n}$，其中 $n\in\mathbb{N}$ 且不为完全平方数，且它们均为可去间断点，证明平凡.

□

(概念题)

Problem: 2

问题 2

解. 构造如下：

$$(1)f(x)=\begin{cases}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x\in\mathbb{Q}\bigcap[0,1))\\ -\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x\in\mathbb{Q}^c\bigcap[0,1))\\ 0(x=1)\end{cases}$$

$$(2)g(x)=\sin\frac{1}{x}(x\in(0,1))$$

$$(3)h(x)=\frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{x}(x\in(0,1))$$

□

(利用特殊函数来构造)

Problem: 3

问题 3

证明. 任取区间 (a,b) 内一点 x_0，则由 $g(x)$ 单调知显然该点处左右极限均存在 (单调收敛定理)，故不妨设单调递增，从而有

$$g(x_1)\leq\lim_{x\to x_0^-}g(x)\leq g(x_0)\leq\lim_{x\to x_0^+}g(x)\leq g(x_2)(a<x_1<x_0<x_2<b)$$

又 $g(x)$ 值域为 $\mathbb{R}$，故上式中间两个不等号成立等号，即在 x_0 处连续，由任意性知 $g(x)$ 连续.

□

(抓住连续函数从区间映射到区间的特性)

Problem: 4

问题 4

解. (1) 因为 $f(x)$ 严格递增，从而其存在严格递增的反函数，又其连续，故反函数也连续；
(2) 任意 $X>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，存在唯一 y_X 使得 $y_X=X\mathrm{e}^X$，则任意 $y>y_X$，由 $f^{-1}(x)$ 单调递增知 $f^{-1}(y)>f^{-1}(y_X)=X$，从而 $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=+\infty$.
(3) 作换元 $x=f^{-1}(y)$，则由 (2) 知

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{f^{-1}(y)}{\ln y}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln\left(x\mathrm{e}^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x+x}=1$$

从而极限为 1. □

(反函数的特征)

Problem: 5

问题 5

证明. 容易发现任意有理数 $\frac{q}{p}$，均有 $f\left(\frac{q}{p}\right)=f\left(\frac{1}{p}\right)=f(0)$，从而所有有理数点取值相同，故对任一无理数点 x_0，考虑数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{[10^n x_0]}{10^n}\right\}_{n\geq 1}$ 由 Henie 定理知该点处也取 $f(0)$. 综上，$f(x)$ 是常数函数. □

Remark.
利用这个结论可以证明下面这个困难一点的题目：设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(1)=1$，且任意 $x,y\in(0,1)$，若 $x-y$ 为有理数，则 $f(x)-f(y)$ 为有理数，证明：$f(x)=x$.

(有理数与无理数的稠密性)

Problem: 6

问题 6

证明. 反证法，若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不单调，即不妨设存在 $x_1<x_2<x_3$，且有 $f(x_1)>f(x_2)$，$f(x_2)<f(x_3)$，故考虑闭区间 $[x_1,x_3]$ 由连续性知其上存在最小值 m 且不在端点处取得，故有 $f((x_1,x_3))$ 区间左端点为闭，矛盾！ □

(容易题)

Problem: 7

问题 7

解. (1) 显然函数单调递增，且 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=\mathrm{e}+n-2>0$，故存在唯一零点.
(2) 显而易见 $na_n=2-\mathrm{e}^{a_n}<2$，故有 $0<a_n<\frac{2}{n}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(2-\mathrm{e}^{a_n})=1$$

(3) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}n\left(na_n-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\mathrm{e}^{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-na_n\right)=-1$$

从而极限为-1. □

(容易题)

Problem: 8

问题 8

解. 注意到以下几个基本事实

$$\lim_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x-|p(x)|)=+\infty$$

从而我们还有 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-|p(x)|)=-\infty$，故至少存在一根. □

(容易题)

Problem: 9

问题 9

证明. 设 $f(x_i)=\min\limits_{1\le k\le n}f(x_k)$，$f(x_j)=\max\limits_{1\le k\le n}f(x_k)$，从而有

$$f(x_i)\le\sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}\le f(x_j)$$

故由连续性知存在 ξ 介于 x_i 与 x_j 之间使得 $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}$ 即证. □

(容易题)

Problem: 10

问题 10

证明. 构造 $F(x)=f(x+1)-f(x)(0\le x\le n-1)$，从而显见

$$F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(n)$$

从而由介值性知存在 $\xi\in[0,n-1]$ 使得 $F(\xi)=\dfrac{f(n)}{n}$ 即证. □

(容易题)

Problem: 11

问题 11

证明. 反证法，若方程 $f(x)=g(x)$ 无实根，则由连续性知 $f(x)-g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不变号，从而不妨假设恒有 $f(x)>g(x)$，从而我们有：

$$f(f(x))>g(f(x))=f(g(x))>g(g(x))$$

这表明方程 $f(f(x))=g(g(x))$ 无实根，矛盾！即证. □

(抓住连续函数无实根的反面很好用)

Problem: 12

问题 12

证明. 注意到 $f(x)+f(2x)=0$，从而有 $f(x)=f(4x)$，故对任意实数 x_0，则考虑数列 $x_n=\dfrac{x_0}{4^n}$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 结合 Henie 定理有

$$f(x_0)=\cdots=f\left(\frac{x_0}{4^n}\right)=\cdots=f(0)$$

从而 $f(x)\equiv f(0)$，而 $f(0)+f(0)=0$，从而 $f(x)\equiv 0$.

□

(容易题)

1.3.2 B 组题目

Problem: 1

问题 1

证明. 我们往简单方向考虑构造:
不妨想象想要得到的就是幂函数 x^c(c 为待定系数), 从而依题意知恒有

$$(4x)^c = (2x)^c + x^c$$

即有 $4^c - 2^c - 1 = 0$, 解得 $2^c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 从而存在函数 $f(x) = x^{\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ 符合要求. □

(从简单情况考虑)

Problem: 2

问题 2

证明. □

(从简单情况考虑)

Problem: 3

问题 3

证明. □

()

Problem: 4

问题 4

证明. □

()

Problem: 5

问题 5

证明. □

()

Problem: 6

问题 6

证明. □

()

Problem: 7

问题 7

解. 注意到原式等价于：

$$f(x+y)-\frac{\lambda}{2}(x+y)^2=f(x)-\frac{\lambda}{2}x^2+f(y)-\frac{\lambda}{2}y^2$$

从而设 $g(x)=f(x)-\frac{\lambda}{2}x^2$，则 $g(x)$ 连续且满足 Cauchy 方程 $g(x+y)=g(x)+g(y)$，故有存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得 $g(x)=kx$.

故全体满足条件得函数 $f(x)$ 为 $\frac{\lambda}{2}x^2+kx$. □

()

Problem: 8

问题 8

解. 由题可知对任意 $\theta\in[0,\pi]$，有

$$f(\cos\theta)=2\cos\frac{\theta}{2}f\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

从而我们可以得到对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，有

$$\begin{aligned}f(\cos\theta)=2\cos\frac{\theta}{2}f\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)&=2^n\cos\frac{\theta}{2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}f\left(\cos\frac{\theta}{2^n}\right)\\&=\frac{2^n\cos\frac{\theta}{2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}f\left(\cos\frac{\theta}{2^n}\right)\\&=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}f\left(\cos\frac{\theta}{2^n}\right)\end{aligned}$$

从而由 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$，则由 f 连续可知 g 在 $[-1,1)$ 上连续，而任取 $\theta\neq0,\pi$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$ 存在，则可知 $g(1-0)$ 存在，设 $g(1-0)=c$，则可知有 $f(\cos\theta)=c\sin\theta(\theta\in[0,\pi])$. 即有 $f(x)=c\sqrt{1-x^2}(x\in[-1,1])$，从而 f 为偶函数，则 $f(2x^2-1)$ 为偶函数，而 $2xf(x)$ 为奇函数，从而 $f(x)\equiv0$，即证. □

(通过 *Henie* 定理联系连续性论证极限存在是本题的难点)

Problem: 9

问题 9

证明. □

()

Problem: 10

问题 10

证明. □

()

Problem: 11

问题 11

证明. □

()

1.4 补充题 4

1.4.1 A 组题目

Problem: 1

问题 1

证明. 考虑函数 $g_x(y) = \begin{cases} \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| (y \in (a,b) \setminus \{x\}) \\ |f'(x)|\,(y=x) \end{cases}$，从而显见 $g(y)$ 在 (a,b) 上连续，且 $g_x(y) \le M(y \in (a,b) \setminus \{x\})$. 故由极限得保号性知 $|f'(x)| = \lim\limits_{y \to x} g(y) \le M$，即证. □

(容易题)

Problem: 2

问题 2

证明. 注意到 $f(0) = 2f(0)$，从而有 $f(0) = 0$，考虑函数 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}(x \neq 0)$，且设 $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$, 则有 $g(2x) = g(x)$. 结合任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$，故有 $g(x)g(x) \equiv g(0) = f'(0)$，即证. □

(容易题)

Problem: 3

问题 3

证明. (1) 对任意 $x_0 \neq 1$，分别取有理数列 $\{q_n\}$ 和无理数列 $\{r_n\}$ 且均趋向于 x_0，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = x_0^2 \neq 2x_0 - 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$，从而不连续；

(2) 容易证明任意数列趋向于 1 时, 均有极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = 2$，即证. □

(容易题)

Problem: 4

问题 4

解. 注意到

$$\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)=\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{na}{n^2}\right)}$$

而由

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2}+o\left(\frac{a}{n^2}\right)\right)\\&=\frac{a}{2}+\lim_{n\to\infty}o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

从而极限为 $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$. □

（容易题）

Problem: 5

问题 5

解. 由题知 $y-\sqrt{3x}=-t^3$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3-3t^2,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-t^2}{2t}$$

从而进一步我们有:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{-t^2-1}{2t^2}$$

故 $y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-t^2-1}{12t^3}$，故代入知所求值为 3. □

（容易题）

Problem: 6

问题 6

解.
$$(x^a)' = ax^{a-1}, (a^x)' = a^x \ln a$$
$$\left(a^{x^x}\right)' = (x^x)' a^{x^x} \ln a = (1+\ln x)\, x^x a^{x^x} \ln a$$
故 $f'(x) = ax^{a-1} + a^x \ln a + (1+\ln x)\, x^x a^{x^x} \ln a$. □

（容易题）

Problem: 7

问题 7

解. 对方程左右两边同时求一阶导：$xy' + y - \dfrac{y'}{y} = 0$ 即 $xyy' + y^2 - y' = 0$，再求一次导即为 $xyy'' + (y + xy')y' + 2yy' - y'' = 0$，解出 y'' 即可，答案略. □

（容易题）

Problem: 8

问题 8

解. 注意到 $f(x) = \dfrac{x^{2016}}{x^2-1} = x^{2014} + \cdots + x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$，从而
$$f^{(2016)}(x) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(2016)} = 2016!\left(\frac{1}{(x-1)^{2017}} - \frac{1}{(x+1)^{2017}}\right)$$
□

（容易题）

Problem: 9

问题 9

解. 注意到 $\mathrm{e}^x y = x^2 + x + 1, \mathrm{e}^x(y + y') = 2x + 1, \mathrm{e}^x(y + y' + y'') = 2$，从而有 $\mathrm{e}^x\left(y' + \cdots + y^{(9)}\right) = \mathrm{e}^x\left(y' + \cdots + y^{(10)}\right) = 0$，故有 $y^{(10)} = 0$. □

（容易题）

Problem: 10

问题 10

解. (1) 若 $f(x)$ 在 0 处连续，则有 $\alpha>0$，若 $f(x)$ 在 0 处可导即有 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}\right)$ 存在也即 $\alpha>1$，而 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$，则有 $\alpha>2$ 时导函数连续；

(2) 注意到当 $\alpha>4$ 时有 $f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}(x\neq 0)\\ 0(x=0)\end{cases}$，$f''(x)=\begin{cases}(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-x^{\alpha-4})\sin\frac{1}{x}-2(\alpha-1)x^{\alpha-3}\cos\frac{1}{x}(x\neq 0)\\ 0(x=0)\end{cases}$，则显见当 $\alpha>5$ 时 $f'''(0)$ 存在. □

(容易题)

1.4.2 B 组题目

Problem: 1

问题 1

解. 这样的函数 $f(x)$ 不存在，理由如下：

一方面考虑 $f(f(x))$ 的不动点，则有 $f(f(x))-x=x^2-4x+3=0$ 解得 $x=1$ 或 3，从而有 $f(f(1))=1, f(f(3))=3$.

进而我们设 $f(1)=c$, 则有 $f(c)=f(f(1))=1$, 也即 $f(f(c))=f(1)=c$, 故 c 也为 $f(f(x))$ 得不动点，即 $c=1$ 或 3. 从而我们分两种情况讨论：

Case I: 若 $c=1$，即 $f(1)=1$ 则由 $f(x)$ 可微知 $(f(f(x)))'=f'(x)f'(f(x))=2x-3$，即有 $-1=f'(1)f'(f(1))=[f'(1)]^2$ 矛盾！

Case II: 若 $c=3$，即 $f(1)=3$，可得 $f(3)=1$，故有 $f'(1)f'(f(1))=f'(1)f'(3)=-1$，$f'(3)f'(f(3))=f'(3)f'(1)=3$，两者不相同，矛盾！

综上不存在这样的连续可微函数 $f(x)$.

Remark.

关于这类二次多项式的复合函数方程 $f(f(z))=az^2+bz+c(z\in\mathbb{C})$ 的有解性问题早在 1980 年就已经被 R.E.Rice 等人解决，特别地有结论：

若在实轴上考虑上述方程，且记 $\Delta^*=(b-1)^2-4ac$，则当 $\Delta^*>1$ 时方程无解，$\Delta^*\leq 1$ 时则存在连续解，参考论文连接见下 http://yaroslavvb.com/papers/rice-when.pdf

□

(遇到嵌套类型的函数考虑不动点)

Problem: 2

问题 2

解. □

(容易题)

Problem: 3

问题 3

解. 我们考虑构造震荡的分段函数:

$$f(x)=\begin{cases}0(-2\leq x\leq 0,1<x\leq 2)\\ \dfrac{x^2}{n}\sin\dfrac{n}{nx-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\leq x<\dfrac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right)\end{cases}$$

容易验证符合要求. □

(容易题)

Problem: 4

问题 4

证明. 注意到 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $f''(x)=\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$, 从而有一般的对 $n\geq 2$, 有

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{2}\left(\frac{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}}{(x^2-1)^{n-1}}\right)$$

从而结论显见. □

(不能想复杂, 直接求导找规律)

Problem: 5

问题 5

证明. □

(不能想复杂, 直接求导找规律)

1.5 补充题 5

1.5.1 A 组题目

Problem: 1

问题 1

解. 直接求导即有 $f'(x) = (7x-4)(x-1)^2x^3$，从而容易看出 $x=0$ 时一个极大值点，$x = \dfrac{4}{7}$ 为一个极小值点. □

(容易题)

Problem: 2

问题 2

解. 直观画图可知实根个数为 7 个 (注意到为奇函数). □

(容易题)

Problem: 3

问题 3

解. 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^{x^x}-x^x}{x^x-x} &= \lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^{(x^x-1)\ln x}-1}{\mathrm{e}^{(x-1)\ln x}-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1} = 1\end{aligned}$$

从而极限为 1. □

(容易题)

Problem: 4

问题 4

解. 由 Taylor 展开可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}\right)-\left(\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{6}\right)+o(x^3)}{\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^3}{3}\right)-\left(x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{6}\right)+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=2$$

从而极限为 2. □

(容易题)

Problem: 5

问题 5

解. 由 Taylor 展开可得 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2),\sin^2 x=x^2-\dfrac{1}{3}x^4+o(x^4)$，故有

$$\mathrm{e}^x\sin^2 x=x^2+x^3+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$$

□

(容易题)

Problem: 6

问题 6

证明. 显见存在 $\delta>0$ 使得 $f'(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上单调递增且小于 0，从而由 Lagrange 中值定理，存在 $x_0<\xi<x$ 使得 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$，从而有

$$x-x_0<\frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x-x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x)}<0$$

从而由夹逼定理即有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0.$ □

(容易题)

Problem: 7

问题 7

证明. 必要性显然，充分性取对数等价于有 $\begin{cases} \ln a \geq \dfrac{\ln(x+1)}{x} & (x \geq 0) \\ \ln a \leq \dfrac{\ln(x+1)}{x} & (x < 0) \end{cases}$，从而可知 $a = \mathrm{e}$，即证. □

(容易题)

Problem: 8

问题 8

证明. 由 Lagrange 中值定理，知存在 ξ_1，ξ_2 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1 = \frac{f(2)-f(2)}{2-1} = f'(\xi_2)$$

故由 Rolle 定理知命题成立. □

(容易题)

Problem: 9

问题 9

证明. (1) 设 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$，则有 $F'(x) = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \leq 0$，从而有 $F(x)$ 单调递减；
(2) 注意到：

$$\frac{x}{x+y}f(x) + \frac{y}{x+y}f(y) = \frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{f(x)}{x} + \frac{y^2}{x+y}\cdot\frac{f(y)}{y} \geq \frac{x^2+y^2}{x+y}\cdot\frac{f(x+y)}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y}f(x) + \frac{x}{x+y}f(y) = \frac{xy}{x+y}\cdot\frac{f(x)}{x} + \frac{xy}{x+y}\cdot\frac{f(y)}{y} \geq \frac{2xy}{x+y}\cdot\frac{f(x+y)}{x+y}$$

从而相加即有 $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$，即证. □

(容易题)

Problem: 10

问题 10

证明. 对 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 作两次 Taylor 展开，即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{b-a}{2}\right)+f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(a)+f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a-b}{2}\right)+f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(b)+f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

其中 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$，从而可知 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$，即证. □

（容易题）

1.5.2 B 组题目

Problem: 1

问题 1

证明. 注意到对任意 $x,y\geq a$，由 Lagrange 中值定理知存在 ξ 使得 $|f(x)-f(y)|=f'(\xi)|x-y|\leq M|x-y|$，从而 $f(x)$ 满足 Lipsitch 条件，故一致连续.
从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得任意 $|x_1-x_2|<\delta$ 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而将 $[a,a+1]$ 分割为 $n=\left\lceil\dfrac{1}{\delta}\right\rceil$ 个长度均为 $\Delta=1/\left\lceil\dfrac{1}{\delta}\right\rceil$ 的区间，故由对任意 $x\geq a$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，从而存在 $N=\max\limits_{0\leq k\leq n}N_k$，使得任意 $a+k\Delta$，均有任意 $n'>N$，$|f(a+k\Delta+n')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
故对任意 $x>a+1+N$，x 落在某个区间 $[a+k\Delta+n^*,a+(k+1)\Delta+n^*]$ 内，且 $n^*>N$，从而 $|f(x)|<|f(x)-f(a+k\Delta+n^*)|+|f(a+k\Delta+n^*)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，即证.

□

（对于这类问题合理分段是关键）

Problem: 2

问题 2

证明. 注意到 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，故有唯一零点 x_0.
因为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\beta$，从而存在 $N>0$ 使得任意 $x>N$ 有 $f'(x)>\dfrac{\beta}{2}$，任意 $x<-N$ 有 $f'(x)<\dfrac{\alpha}{2}$，故由 Lagrange 中值定理可知任意 $n>N$ 有

$$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)>\frac{\beta}{2}, f(-n-1)-f(-n)=f'(\xi_n')>-\frac{\alpha}{2}$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0)<0$ 知 $f(x)$ 恰有两个零点，即证.

$\square$

(通过函数图像获得解决思路)

Problem: 3

问题 3

证明. 本题即例 10 的简化版本.

$\square$

(利用 *Taylor* 展开解决高阶导数问题)

Problem: 4

问题 4

证明. $\square$

(利用 *Taylor* 展开解决高阶导数问题)

1.6 补充题 6

1.6.1 A 组题目

Problem: 1

问题 1

证明. 设 $f(a_n)$ 收敛于 A，从而设 $a=f^{-1}(A)$，下证 a_n 收敛于 a，若不然，即存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 N，总存在 $n>N$，使得 $|a_n-a|\geq\varepsilon_0$，从而不妨假设存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得恒有 $a_{n_k}\geq a+\varepsilon_0$. 故有 $f(a_{n_k})\geq f(a+\varepsilon_0)=A+\delta$(利用单调递增的性质)，这表明 $f(a_n)$ 不收敛，矛盾！ □

(把握住收敛的本质定义即可解决问题)

Problem: 2

问题 2

证明. □

(把握住收敛的本质定义即可解决问题)

Problem: 3

问题 3

证明. 我们构造集合

$$S=\{x|f(x)>g(x),x\in[a,b]\}$$

注意到 $b\in S$，从而 S 非空，故存在下确界，且设 $\xi=\inf S$，则有任意 $x<\xi$，$f(x)<g(x)$，也即 $f(\xi)<f(x)<g(x)$，则令 $x\to\xi_-$，则有 $f(\xi)\leq g(\xi)$(其中利用了 $g(x)$ 的连续性). □

(利用 *Lebesgue* 方法解决此类问题)