数分高代拯救计划——第一次高代月考考前辅导

2021 级省身班　朱凯　知乎：凯淼淼

第一次高代月考的考察范围主要会涉及到以下内容：

- 多项式的带余除法 (长除法)，Bezout 定理，计算多项式的最大公因式 (辗转相除法)；
- 因式分解定理，多项式的标准分解式，重根/重因式判别法；
- 有理 (整) 系数多项式，Eisenstein 判别法；
- 行列式的组合定义，利用组合定义直接计算，行列式的性质；
- 利用初等变换化简行列式为上三角计算，行列式按一行 (列) 的展开 (代数余子式)；
- 利用 Cramer 法则求解线性方程组；
- 行列式计算的一些技巧，特殊行列式的计算，Laplace 定理 ($*$).

同学们可以参考上述知识点合上书本回忆，是否熟练一些基本算法，保证每个算法都了如指掌.

注：例题中标记为 (*) 的是与月考难度相近的问题，为主要讲解内容，* 数量越高题目相对难度越大，作为选讲题，同时也可以作为补充练习.

1　多项式

1.1　计算最大公因式，因式分解、重根/重因式判别法

例 1.1 (*). 利用辗转相除法求 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$:

$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\ g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2.$

例 1.2 (*). 多项式 $f(x)=x^4+4x^2-4x+3$ 有无重因式？为什么？

例 1.3 (*). 求 t 值使 $f(x)=x^3-tx+2$ 有重根，并求 $(f(x),f'(x))$.

例 1.4 (**). 证明: $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 没有重因式.

例 1.5 (***). 在实数域中分解下列因式:

(1) x^4+1;　(2) x^6+1;　(3) x^n+1;　(4) x^n-1，对任意 $n\in\mathbb{N}^*$.

1.2　整除、Bezout 定理、不可约多项式 ($*$) 证明题

例 1.6 (*). 如果 $f(x),g(x)$ 全不为 0, 且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$, 证明: $(u(x),v(x))=1$.

例 1.7 (*). 设 $(f(x),g(x))=1$，证明：$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

例 1.8 (**). 证明下面两问:

(1) 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq 0$，证明：$(f,g)=(f_1,g_1)$；

(2) 设 $f_i(x)=a_{i1}g_1(x)+\cdots+a_{in}g_n(x)$，$h_i(x)=b_{i1}g_1(x)+\cdots+b_{in}g_n(x)$，其中 $i=1,\cdots,n$，这里 f_i，g_i，h_i，$i=1,\cdots,n$ 均为数域 $\mathbb{P}$ 上的非零一元多项式，若有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

证明：$(f_1,f_2,\cdots,f_n)\mid(h_1,h_2,\cdots,h_n)$.

例 1.9 (***). 我们通过下面若干小问来证明多项式版本的 Fermat 大定理:

(1) 设 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$，$N(f)$ 表示多项式 $f(x)$ 中不同根的个数，如 $N(x(x-1)^2)=2$，证明*:*

$$N(f)=\deg\left(\frac{f}{(f,f')}\right);$$

(2) 设 $f,g,h\in\mathbb{C}[x]$ 为三个两两互素的多项式，且 $f+g+h=0$，证明*:*

$$(f,f')\left|\frac{g'}{(g,g')}\cdot\frac{h}{(h,h')}-\frac{g}{(g,g')}\cdot\frac{h'}{(h,h')}\right.;$$

(3) 在(**2**) **的条件**下，证明 Mason − Stothers 定理*:*

$$\max\{\deg f,\deg g,\deg h\}\leq N(fgh)-1;$$

(4) 借助 Mason − Stothers 定理，证明多项式版本的 Fermat 大定理*:*
设 $f,g,h\in\mathbb{C}[x]$ 且两两互素，若成立 $f^n+g^n=h^n$，证明*:* $n=1$ 或 *2.*

例 1.10 (***). 本题我们关心 x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上的分解:

(1) 证明：对任意 $n=2^q(2l+1)$，其中 $q,l\in\mathbb{N}^*$，有 x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上可约；

(2) 证明：对任意 2 的幂次 $n=2^q(q\geq 1)$，有 x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约；

提示*:* 利用初等数论中的 Kummer 定理，我们有任意 $1\leq k\leq 2^q-1$，均有 $\mathrm{C}_{2^q}^k$ 为偶数.

(3) 设 $p\geq 3$ 为素数，证明：x^p+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上恰能分解成两个不可约多项式的乘积.

2　行列式

2.1　行列式的组合定义、行列式的性质

例 2.1 (*). 若 n 阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个，证明：这个行列式的值等于 0.

例 2.2 (***). 设 A 是一个 2022 阶方阵，其主对角元全为 0，而其他元素为 2021 或 2023，证明：$|A|\neq 0$.

例 2.3 (***). 将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 2^n 个不同子集记作 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$. 定义一个 2^n 阶方阵 B 如下：如果 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则 B 的第 i 行第 j 列元素为 1，否则该元素为 0 (其中 $1\leq i,j\leq 2^n$).

(1) 当 $n=1$ 且 $A_1=\varnothing, A_2=\{1\}$ 时，求出对应方阵 B 的行列式；

(2) 证明：$|B|$ 与 2^n 个子集的顺序无关；　　　　(3) 求 $|B|$.

2.2　初等变换化为上三角，行列式按一行 (列) 的展开 (代数余子式)

例 2.4 (*). 设 $n\times n$ 阶行列式 $|(a_{ij})|$，其中 $a_{ij}=\min\{i,j\}$，计算行列式的值.

例 2.5 (**). 设 $x\in\mathbb{R}$，我们考虑行列式

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

(1) 证明：$D(x)$ 是关于 x 的一次函数；

(2) 证明：$D'(1)=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 $D(0)$ 的代数余子式；

(3) 证明：$D(x)=D(0)+x\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}$.

例 2.6 (*). 已知 n 级行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求代数余子式 $A_{1j}, j=1,\cdots,n$ 之和.

例 2.7 (**). 设 A_{ij} 是行列式 $|(a_{ij})|$ 的代数余子式，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

3 行列式计算中的方法

3.1 鸡爪型行列式——化为上三角矩阵

鸡爪型行列式单独拿出来，是因为很多行列式最后都会化简到鸡爪型 (比如加边法之后)，因此这一步必须熟练计算.

例 3.1 (*). 求 $n+1$ 阶行列式的值 $(a_i \neq 0, 1 \leq i \leq n)$: $\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

3.2 镶边法 (升阶法)——非常重要

第一类题型的特征是一行/列中会出现类似的乘积/和，只有细微的差别，因此可以考虑把一行/列的公共部分抽离出来，单独升高一阶进行处理，这在两年月考中都有考察，一定要掌握.

例 3.2 (*). 计算 n 级行列式: $\begin{vmatrix} a_1b_1+1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2+1 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n+1 \end{vmatrix}$.

例 3.3 (*). 计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$, $(\lambda_i \neq 0, i=1,\cdots,n)$.

例 3.4 (***). 设 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$ ，计算 $\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

第二类题型是与 Vander Monde 行列式相结合的问题:

例 3.5 (*). 计算 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$, 并尝试计算删去任一行/多行的情形.

例 3.6 (**). 计算 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

3.3 递推法和数学归纳法

对这类问题，我们往往需要对行列式的某一行/列进行拆分，从而化为递推数列.

例 3.7 (**). 计算 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \gamma & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma & \gamma & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$.

例 3.8 (***). 计算 n 阶行列式: $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_n \end{vmatrix}$.

例 3.9 (**). 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos t & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos t & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos t \end{vmatrix}$.

4 补 (yin) 充 (jian) 题

例 4.1 (***). 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$.

例 4.2 (****). 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果} i+j \text{为素数} \\ 0 & \text{如果} i+j \text{非素数} \end{cases},$$

证明: $|A|$ 的绝对值为完全平方数.

例 4.3 (***). 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in \mathbb{P}[x]$，证明：存在 $n(n-1)$ 个 $\mathbb{P}$ 上的多项式 $q_{ij}(x)(2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n)$，使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) & \cdots & q_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1}(x) & q_{n2}(x) & \cdots & q_{nn}(x) \end{vmatrix} = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)).$$

例 4.4 (***). 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}.$$

例 4.5 (**). 设 n 阶行列式 $|D|$ 每行每列元素之和均为 0，证明：$|D|$ 的代数余子式 D_{ij} 均相等.

例 4.6 (***). 证明: 对任意 $n^2(n \geqslant 2)$ 个互异的数，可经适当排序为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2}$，使得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n^2-n+1} & a_{n^2-n+2} & \cdots & a_{n^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

例 4.7 (***). 设 $n \geqslant 3$，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是关于 x 的次数 $\leqslant n-2$ 的多项式，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为任意数. 证明：行列式

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

例 4.8 (**). 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1^{50} & 2^{50} & 3^{50} & \cdots & 100^{50} \\ 2^{50} & 3^{50} & 4^{50} & \cdots & 101^{50} \\ 3^{50} & 4^{50} & 5^{50} & \cdots & 102^{50} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 100^{50} & 101^{50} & 102^{50} & \cdots & 199^{50} \end{vmatrix}$.

例 4.9 (****). 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix}$，这里 (i,j) 表示 i,j 的最大公约数.