一般拓扑学基础——部分答案

Chern Class 凯淼淼

目录

1 练习 3.3

1.证明 一方面，若 (X,d) 全有界，为说明每个序列都有 Cauchy 子列，我们直接构造，核心是利用了全有界的子集仍然全有界，给定序列 $\{x_n\}$，则存在有限个 $B(x,1)$ 覆盖 X，因此存在 $B(x^1,1)$ 中含序列无穷多项，取其中下标最小的一项，即 x_{n_1}，注意到 $B(x^1,1)$ 全有界，因此存在有限个 $B(x,1/2)$ 覆盖，进而有 $B(x^2,1/2)$ 包含序列无穷多项，取其中下标第 2 小的一项，即 x_{n_2}，由此归纳下去可得到一个子列 $\{x_{n_k}\}$，其中当 $k \geq N$ 时，任意 $s > k$，x_{n_s} 均在 $B(x^N,1/N)$ 中，因此不难有这确实为一个 Cauchy 列.

另一方面，若每个序列都有 Cauchy 子列，我们欲证明其全有界，自然是反证法，若不然，即存在 $\varepsilon > 0$，使得 $B(x,\varepsilon)$ 不存在有限子覆盖，任取 $x_0 \in X$，取 $x_1 \in X \setminus B(x_0,\varepsilon)$，归纳下去取 $x_n \in X \setminus \bigcup\limits_{1 \leq k \leq n-1} B(x_k,\varepsilon)$，从而不难看到任意 n,m 有 $d(x_n,x_m) > \varepsilon$，必然不含 Cauchy 子列，综上我们完成了证明. $\square$

2.证明 (1) 利用全有界的子集全有界，不难得到一个方向. 下设 A 全有界，则对任意 ε，存在 $B(x_k,\varepsilon)$，$1 \leq k \leq n$ 覆盖 A，事实上它们也刚好覆盖 $\overline{A}$，因为任取 $y \in \overline{A}$，有 $x_y \in A$，$d(x_y,y) < \varepsilon/2$，而存在 $1 \leq j \leq n$ 使得 $d(x_j,x_y) < \varepsilon/2$，因此有 $y \in B(x_j,\varepsilon)$，这即表明 $\overline{A}$ 全有界.

(2) 有界子集一定包含在一个紧球之中，紧球一定全有界，从而其为全有界子集可得全有界.

(3) 一方面若 $K \subseteq X$ 序列紧，则可知其紧，也可知其全有界且完备，因此其是 X 的全有界子集，而我们又知道完备度量空间的完备子集一定是闭子集，因此 K 是 X 的全有界闭子集.

另一方面，利用完备度量空间的闭子集完备，知道 K 作为度量空间全有界且完备，因此可知 K 序列紧. $\square$

注：关键在于记忆对度量空间：$\boxed{\text{序列紧}}$等价于$\boxed{\text{紧}}$等价于$\boxed{\text{全有界且完备}}$.

2 练习 4.1

1.**解** 我们事实上有 $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，但是不一定相等，因为考虑 $A=\{-1/n\}$，$B=\{1/n\}$ 即可. 我们还有 $A^\circ\cup B^\circ\subseteq(A\cup B)^\circ$，但是不一定相等，因为考虑 $A=\mathbb{Q}$，$B=\mathbb{Q}^c$. $\square$

2.**解** 注意到 $\text{int}_X A\subseteq A\subseteq Y$，且为 X 中开集，因此 $\text{int}_X A$ 是 Y 中包含 A 的开集，自然有 $\text{int}_X A\subseteq\text{int}_Y A$. 等号不一定成立，因为考虑 $A=[0,1)\subseteq Y=[0,2]$，$X=\mathbb{R}$. $\square$

3.**证明** (b) 任取 $x\in U\cap\overline{A}$，则存在 x 邻域 $V\subseteq U$，进而任取 x 包含于 V 中的邻域，总有 $U\cap A$ 中元素，因此 $x\in\overline{U\cap A}$.

(c) 直接利用 (b) 并结合 $\overline{A}=X$ 即可. $\square$

4.**证明** 利用内部是包含的最大开集，我们只需证明 $(F\cup A)^\circ\subseteq F\cup A^\circ$，同时取补集，设 $O=X\setminus F$，则即要证明 $O\cap\overline{(X\setminus A)}\subseteq\overline{O\cap(X\setminus A)}$，利用上一题的 (b) 即知成立. $\square$

3 练习 4.2

1.**证明** 为证 f 连续，只需对任意开集 O，$f^{-1}(O)$ 为开集，注意到 $f^{-1}(O)=\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(O)$，而每个 f_i 限制在 U_i 上连续，因此 $f_i^{-1}(O)=f_i^{-1}(O\cap U_i)$ 为 U_i 中开集，而 U_i 开，从而 $f^{-1}(O)$ 开，即证. $\square$

5.**解** 考虑 $\{n+1/n\}$ 为闭集，其像不为闭集，因为不含极限点 $(1,0)$. 对 g，考虑开集 $[0,1)$，其像不为 S^1 的开圆弧，不为开映射. $\square$

7.**证明** (a) 推 (b)：若 f 开，从而有 $f(f^{-1}(B)^\circ)$ 为开集，而 $f(f^{-1}(B)^\circ)\subseteq f(f^{-1}(B))\subseteq B$，从而有 $f(f^{-1}(B)^\circ)\subseteq B^\circ$，因此即 $f^{-1}(B)^\circ\subseteq f^{-1}(B^\circ)$；

(b) 推 (c)：注意到 $X\setminus\overline{f^{-1}(B)}=(X\setminus f^{-1}(B))^\circ=f^{-1}(Y\setminus B)^\circ\subseteq f^{-1}((Y\setminus B)^\circ)=f^{-1}(Y\setminus\overline{B})=X\setminus f^{-1}(\overline{B})$，进而即有 $f^{-1}(\overline{B})\subseteq\overline{f^{-1}(B)}$；

(c) 推 (a)：(c) 推 (b) 将上面一步操作完全照搬即可，下证 (b) 推 (a)，任取 U 为 X 中开集，则 $f^{-1}(f(U)^\circ)\supseteq f^{-1}(f(U))^\circ\supseteq U^\circ=U$，同时作用 f，即有 $f(U)\subseteq f(f^{-1}(f(U)^\circ))\subseteq f(U)^\circ$，因此可知 $f(U)$ 为开集，即为开映射. $\square$

8.**证明** (a) 推 (b)：注意到 $f(\overline{A})$ 是包含 $f(A)$ 的闭集即可；

(b) 推 (c)：反证法，若不然，即存在 $y\in Y$，以及 X 中开集 U 满足 $f^{-1}(y)\subseteq U$，有任意 y 的邻域 V，$f^{-1}(V)\setminus U$ 非空，也即 $f^{-1}(V)\cap U^c\neq\varnothing$，因此存在 $y_n\to y$ 使得 $f^{-1}(y_n)\subseteq U^c$，又注意到 $f^{-1}(y)\subseteq U$，因此 $y\notin f(U^c)$，而 $y_n\in f(U^c)$ 进而 $y\in\overline{f(U^c)}$，但易见 U^c 为闭集，因此可知矛盾.

(c) 推 (a)：反证法，若 f 不为闭映射，从而存在闭集 A，$f(A)$ 不为闭集，也即存在 $y\in\overline{f(A)}\setminus f(A)$，考虑 $f^{-1}(y)\subseteq X\setminus A$，任取 y 邻域 V，有 $f^{-1}(V)\subseteq X\setminus A$，而 $y\in\overline{f(A)}$，则存在 $z\in V\cap f(A)$，说明 $f^{-1}(z)\subseteq f^{-1}(V)\cap A\neq\varnothing$，矛盾！ $\square$

4 练习 4.3

1.**证明** 由 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{O}$ 的子基，设生成基为 $\mathcal{B}'$，任取 $U \in \mathcal{B}'$，从而存在 $U_i \in \mathcal{B}$，$1 \le i \le n$ 使得 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$，而 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$，从而有任意 $1 \le i \le n$，$U_i \in \mathcal{T}$，进而 $U \in \mathcal{T}$，也即 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$，进一步不难有任意 $V \in \mathcal{O}$，其为 $\mathcal{B}'$ 中元素的并，从而在 $\mathcal{T}$ 中，也即 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. $\square$

应用：验证连续性 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，只需要对 $\mathcal{O}_Y$ 的子基 $\mathcal{B}_Y$ 验证即可，因为考虑 $\mathcal{T}_Y = \{V \subseteq Y | f^{-1}(Y) \in \mathcal{O}_X\}$ 也是 Y 上一个拓扑，且 $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{T}_Y$，进而 $\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{T}_Y$，故连续.

2.**证明** 任取 U 为 X 中开集，从而由 $\mathcal{B}$ 为 X 的基，存在 $1 \le i \le n$，$U_i \in \mathcal{B}$，使得 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$，从而 $f(U) = f(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = f(U_1) \cup \cdots \cap f(U_n)$ 为 Y 中开集，因此 f 为开映射. $\square$

3.**证明** 设 $Y \subseteq X \in \mathsf{Top}$，对 X 的基 $\mathcal{B}$，不难验证 $T \cap \mathcal{B}$ 是 Y 的基，从而第二可数是遗传性质；设 $y \in Y$，其在 X 中有可数邻域基 $\mathcal{N}$，则 $Y \cap \mathcal{N}$ 是 y 在 Y 中的可数邻域基，因此第一可数也是遗传性质；设 $A \subseteq X$ 为一可数稠子集，则对 Y 为开子空间，从而 $A \cap Y$ 与 Y 中任意开集 U，由 $U = \widetilde{U} \cap Y$，从而 U 为 X 中开集，故 $A \cap U \neq \varnothing$，进而 $A \cap Y$ 与 Y 中任一开集相交非空，因此为可数稠集，进而 Y 可分，从而为开遗传性质. $\square$

$\boxed{\text{注：}}$可分不是遗传性质，如考虑 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的闭子集 $\{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$，证明见 [1] 的 P87.

4.**证明** 设 $f : X \to Y$ 为开连续映射，且 $Y = f(X)$，若 X 第二可数，从而有可数基 $\mathcal{B}$，我们断言 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的可数基，可数性显然，任取 V 为 Y 的开集，从而有 $f^{-1}(V)$ 为 X 中开集，故存在 $1 \le i \le n$，$U_i \in \mathcal{B}$ 使得 $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_n$，进一步结合 f 满射，故 $V = f(f^{-1}(V)) = f(U_1 \cup \cdots \cup U_n) = f(U_1) \cup \cdots \cup f(U_n)$，从而可知 $f(\mathcal{B})$ 为 Y 可数基.

第一可数空间开连续像第一可数证明类似，考虑 $f(\mathcal{N})$ 即可. $\square$

5 练习 4.4

1.**证明** 任取 $A\subseteq X$，以及 $x\in\overline{A}$，从而存在 $\{x_n\}\subseteq A$ 使得 $x_n\to x$，从而有 $f(x_n)\to f(x)$，因此 $f(x)\in\overline{f(A)}$，故 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ 由此可知 f 连续，即证. $\square$

2.**证明** 由 x 是 $\{x_n\}$ 的聚点，从而 $\{x_n\}$ 常在 x 的每个邻域，从而由 X 第一可数，设 $\{U_n\}$ 为 x 的可数邻域基，考虑 $V_n=\cap U_i$，从而存在 $x_{n_i}\in V_i$，则 $\{x_{n_i}\}$ 为一收敛到 x 的子列. $\square$

3.**证明** 一方面，若 $f:K\to X$ 连续，从而取 $A=\{1/n|n\in\mathbb{N}\}$，从而 $\overline{A}=K$，则 $a=f(0)\in f(K)=f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，而 $f(A)=\{x_n\}$，从而可知 $\{x_n\}$ 收敛到 a.

另一方面，若 $\{x_n\}$ 收敛到 a，任取 $A\subseteq K$，若 $0\in A$，或 $|A|<\infty$，从而 $\overline{A}=A$，显然 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，若 $0\notin A$，且 $|A|=\infty$，故 $\overline{A}=A\cup\{0\}$，从而由 $\{x_n\}$ 收敛到 a，因此 $a\in\overline{f(A)}$，故仍有 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，即证 f 连续. $\square$

4.**证明** 一方面，若 $f:X\to Y$ 连续，从而任取 $x\in\mathrm{clust}\xi$，则 ξ 常在 x 的任一邻域，我们希望要证 $f\circ\xi$ 常在 $f(x)$ 的任一邻域，因此任取 $f(x)$ 的开邻域 V，从而 $f^{-1}(V)$ 为 x 开邻域，因此任意 $d\in D$，存在 $e\in D$，$d\sqsubseteq e$ 使得 $\xi(e)\in f^{-1}(V)$，从而 $f\circ\xi(e)\in V$，即证 $f\circ\xi$ 常在 V 中，因此 $f(\mathrm{clust}\xi)\subseteq\mathrm{clust}(f\circ\xi)$.

另一方面，为证连续性，只需对任一 $A\subseteq X$，证明 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，任取 $x\in\overline{A}$，从而存在 A 中的网 ξ 收敛于 x，则 $x\in\lim\xi\subseteq\mathrm{clust}\xi$，从而 $f(x)\in\mathrm{clust}(f\circ\xi)$，也即存在 $f(A)$ 中的网 $f\circ\xi$ 常在 $f(x)$ 的任一邻域中，故任取 $f(x)$ 邻域 V，$f\circ\xi$ 常在 V 中，也即任意 $d\in D$，存在存在 $e\in D$，$d\sqsubseteq e$ 使得 $f\circ\xi(e)\in V$，而 $f\circ\xi(e)\in f(A)$，从而可知 $V\cap f(A)\neq\varnothing$，进而可知 $f(x)\in\overline{f(A)}$，由此 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，即证连续. $\square$

注：从上述几题可以看到，联系连续性与网收敛之间关系最密切的 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ 这一条件.

5.**解** 有限补空间的开集为 $\{\varnothing\}\cup\{U:|\mathbb{R}\setminus U|<\infty\}$，从而 $\{x_n\}$ 收敛于 x 当且仅当任意 x 开邻域 U，存在 N，任意 $n>N$，有 $x_n\in U$，当且仅当 X 中任意有限个不为 x 的点 $a_1,\cdots,a_k$，有 N，任意 $n>N$，$x_n\neq a_1,\cdots,a_k$，当且仅当任意 $a\neq x$，$\{x_n\}$ 中只有有限项为 a. $\square$

6 练习 5.1

1.**证明** 内容... □

2.**解** 我们将说明 $(\mathbb{R},\mathcal{S})$ 中的紧子集要么为空集，要么有最小值. 设 K 为 $\mathbb{R}$ 中的非空集合，若 K 紧，则 K 可以被有限覆盖，而易见有限个 $(a_i,+\infty)$ 相交仍为 $(a,+\infty)$，从而 K 有下确界，进一步若下确界为 b 但 $b\notin K$，则考虑覆盖 $(b+1/n,+\infty)$，易见没有有限子覆盖，从而不紧. 另一方面，若 K 有最小元 b，从而其任意覆盖 $\mathcal{U}$，一定存在一个 $a<b$，且 $(a,+\infty)\in\mathcal{U}$，其即构成 K 的一个开覆盖，从而 K 紧. 综上，$(\mathbb{R},\mathcal{S})$ 上紧子集为空集，或有最小元. □

3.**证明** 内容... □

4.**证明** 可数紧即任意可数覆盖都有有限子覆盖，从而设 X 可数紧，$V=f(X)$ 是其连续像，从而设 $\{V_n\}$ 是 Y 的可数开覆盖，则 $\{f^{-1}(V_n)\}$ 是 X 的可数开覆盖，从而存在有限子覆盖 $f^{-1}(V_k)$，则 $Y=f(X)=f(f^{-1}(\cup V_k))=\cup V_k$，即证. □

5.**证明** 一方面，若可数紧，我们采用反证法，若有单调递减闭集列 $F_1\supseteq F_2\supseteq\cdots$，使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F_i=\varnothing$，注意到 $\{X\setminus F_i\}$ 为 X 的一个开覆盖，从而存在有限开覆盖，则可知 $\bigcap\limits_{j=1}^{k}(X\setminus F_{i_j})=X$，进而可知 $F_{i_k}=\varnothing$，矛盾！

另一方面，设 $\mathcal{U}=\{U_n\}$ 为 X 的可数开覆盖，则有 $\left\{X\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\right)\right\}$ 为单调递减闭集列，从而由 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖，从而这个闭集列相交为空，从而可知存在 N，$X\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N}U_i\right)=\varnothing$，也即 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{N}U_i$ 有有限覆盖. □

6.**证明** 内容... □

7.**解** 考虑拓扑空间 $X=\{a,b\}$，赋予拓扑 $\mathcal{T}=\{\varnothing,\{a\},X\}$，从而可见 $\{a\}$ 为紧子集，但不是闭子集 (注意有限集无论赋予何种拓扑，它的任意子集都是紧集).

考虑拓扑空间 $Y=\{e,\pi\}\cup\mathbb{N}$，其上开集为 $\mathbb{N}$ 的离散拓扑并上 $\{e\}\cup\mathbb{N}$，$\{\pi\}\cup\mathbb{N}$ 以及 Y，从而可知 $\{e\}\cup\mathbb{N}$，$\{\pi\}\cup\mathbb{N}$ 均为紧子集，但是相交为 $\mathbb{N}$ 不为紧子集，考虑离散开覆盖即可. □

7 练习 5.2

1.**证明** (a) 一方面，若 X 是 T_0 空间，从而若有 $\mathcal{N}(x)=\mathcal{N}(y)$，则若 $x\neq y$，则不妨设存在 x 邻域 U 有 $y\notin U$，则 $U\in\mathcal{N}(x)$，但 $U\notin\mathcal{N}(y)$，矛盾！

另一方面，任取 $x\neq y$，从而 $\mathcal{N}(x)\neq\mathcal{N}(y)$，不妨设 $\mathcal{N}(x)\not\subseteq\mathcal{N}(y)$，从而存在 $U\in\mathcal{N}(x)$，但不在 $\mathcal{N}(y)$ 中，因此可知 $x\in U$，但 $y\notin U$，即证 X 是 T_0 空间.

(b) 一方面，若 X 是 T_1 空间，从而若有 $\mathcal{N}(x)\subseteq\mathcal{N}(y)$，则若 $x\neq y$，则有开集 U 使得 $x\in U$，但 $y\notin U$，因此 $U\in\mathcal{N}(x)$，但不在 $\mathcal{N}(y)$ 中，矛盾！

另一方面，任取 $x\neq y$，则可知 $\mathcal{N}(x)$ 与 $\mathcal{N}(y)$ 互不包含，因此可取 $U\in\mathcal{N}(x)\setminus\mathcal{N}(y)$，$V\in\mathcal{N}(y)\setminus\mathcal{N}(x)$，则可知 U,V 为符合要求的开集，即知 X 为 T_1 空间. □

8.**证明** 我们考虑证明 $(A^d)^c$ 为开集，而回忆凝聚点之定义，即 $x\in A^d$，则 $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$，也即 x 任一邻域包含 $A\setminus\{x\}$ 中点，进而若 $x\notin A^d$，若不存在开邻域 U 使得 $U\cap A^d=\varnothing$，则任一开邻域 U，存在 $x'\in U\cap A^d$，且 $x'\neq x$，由 X 为 T_1 空间，进而存在 x' 开邻域 $V\subseteq U$ 且 $x\notin V$，故有 $A\setminus\{x,x'\}$ 中点，因此 U 中有 $A\setminus\{x\}$ 中点，这与 $x\notin A^d$ 矛盾！因此可知 A^d 是闭集. □

9.**证明** 一方面，若 X 可数紧，从而任取无限子集中的一个序列 $A=\{x_n\}$，若序列无凝聚点，即任意 $x\in X\setminus A$，存在 x 开邻域 V 使得 $V\cap A=\varnothing$，进而可知 A 为闭集，进一步任意 $x_n\in A$，有开邻域 U_n 使得 $U_n\cap A=\{x_n\}$，否则 x_n 为 A 的一个凝聚点. 因此考虑 X 的一个可数开覆盖 $\{X\setminus A,U_1,\cdots,U_n,\cdots\}$，则存在有限开覆盖，进而可知有 $U_{i_1}\cap\cdots U_{i_n}=A$，则表明 $A=\{x_{i_1},\cdots,x_{i_n}\}$，这与 A 为可数无穷集矛盾！

另一方面，反证法若 X 不可数紧，从而存在一个可数开覆盖 $\{U_n\}$ 使得其不存在有限子覆盖，设 $V_n=\bigcup\limits_{i\leq n}U_i$，从而有 $\{V_n\}$ 是 X 的一个可数开覆盖，且若存在 N 使得任意 $n>N$，$V_n=V_{n+1}$，则可知 $V_N=X$，因此 $\{U_n\}$ 有有限子覆盖，矛盾！因此存在子列 $\{V_{i_k}\}$ 严格单增. 不妨设为 $\{W_k\}$，进而其为严格单增的开覆盖. 取 $x_k\in W_k\setminus W_{k-1}$，则任取 $y\notin X\setminus\{x_1,\cdots\}$，存在 k_y 使得 $y\in W_{k_y}$，则对 $x_1,\cdots,x_{k_y}$，由 X 为 T_1 空间，从而有 y 的开邻域 B_y 不含 $x_1,\cdots,x_{k_y}$，且 $B_y\subseteq V_{k_y}$，进而也不含 x_k，其中 $k\geq k_y$，因此 B_y 与序列相交为空，进而可知序列没有凝聚点，矛盾！(画图来看是很直观的，找 y 邻域夹在 W_{k_y} 和 W_{k_y-1} 之间.) □

注：在上述证明中可见，可数紧推无限集有聚点是不依赖于 T_1 的限制.

10.**证明** 一方面，显然 $f(\cap A_n)\subseteq\cap f(A_n)$，另一方面，注意到 X 紧，因此对单调递减闭集列 $\{A_n\}$，其交 $\cap A_n$ 非空，因此 $\cap f(A_n)$ 非空，任取 $y\in\cap f(A_n)$，则任意 n，存在 $x_n\in A_n$ 使得 $y=f(x_n)$，由 X 紧，因此 $\{x_n\}$ 存在凝聚点 x，从而可知 $x\in\overline{\cap A_n}$，而 A_n 为闭集，从而 $\cap A_n$ 为闭集，因此 $x\in\cap A_n$. 下证 $y=f(x)$，若不然，则由 Y 为 T_1 空间，存在 y 邻域 U，有

$f(x) \notin U$，进而 $x \notin f^{-1}(U)$，而注意到 $x_n \in f^{-1}(U)$，对任意 n，从而这与 x 是 $\{x_n\}$ 聚点矛盾！因此 $y = f(x) \in f(\cap A_n)$，因此 $f(\cap A_n) = \cap f(A_n)$，即证. $\square$

8　练习 5.3

1.**证明** 回忆正则是指任意不交一点和一个闭集可用开集分离，从而任取正则空间 X, $Y \subseteq X$，从而设 $y \in Y$，$F \subseteq Y$ 为闭集，且 $y \notin F$，又存在 X 中闭集 $\widetilde{F}$ 使得 $F = Y \cap \widetilde{F}$，且易见 $y \notin \widetilde{F}$，否则 $y \notin Y$，因此由 X 正则可知存在不交开集 U, V，有 $y \in U$，$\widetilde{F} \subseteq V$，故取 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 即可. □

2.**证明** 设 X 为正则空间，A 为其紧子集， □

3.**证明** 任取 $x \in K$，从而对任意 $y \in H$，$x \neq y$，因此存在 U_y 和 V_y 不交，且 $x \in U_y$，$y \in V_y$，进而 $\{V_y\}_{y \in H}$ 构成 H 的开覆盖，由 H 紧可知存在有限子覆盖，不妨设为 $\{V_1, \cdots, V_n\}$，从而对应的考虑 $U_1 \cap \cdots U_n$ 为 x 的开邻域，且与 $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 不交，也即任意 $x \in K$，存在 U_x 与 V_x 使得为不交开集，且 $x \in U_x$，$H \subseteq V_x$，进一步对 $\{U_x\}$ 构成 K 的开覆盖，因此做类似操作不难得到开集分离 K, H. □

4.**证明** 回忆正规是指任意不交闭集可用不交开集分离，从而任取正规空间 X，$Y \subseteq X$ 为闭子空间，则任取 F_1, F_2 为 Y 中不交闭集，从而由 Y 闭，可知 F_1, F_2 是 X 中不交闭集，因此存在 X 中不交开集 U, V 分离，进而 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 即符合要求. □

5.**证明** 利用 [1] 中的命题 5.3.6 即可，正规空间即每个闭集存在一个闭邻域，其证明是类似于命题 5.3.3 的. □

6.**证明**

□

7.**证明** (b) 设 A, B 为不交闭集，从而 $A^c, B^c \in \mathcal{O}$，从而若 A, B 均不为空集，则有 $0 \notin A^c, B^c$，即 $0 \in A \cap B$，这与不交矛盾，因此 $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ 中没有非平凡的不交闭集，进而正规.

(c) 显然 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 开，但注意到取其中不交闭集 $\{1\}$，$\{2\}$，若有不交开集区分它们，则有 $\mathbb{N}$ 中开集 U, V 使得 $1 \in U \setminus \{0\}$，$2 \in V \setminus \{0\}$，但 $0 \notin U, V$，且 $\mathbb{N} \setminus U$ 与 $\mathbb{N} \setminus V$ 有限，因此自然 $\mathbb{N} \setminus (U \cap V)$ 也有限，因此可知 $U \cap V \cap \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \varnothing$，矛盾. □

8.**证明** 任取 $a \neq b \in \mathbb{R}$，则有开集 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 和 $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ 区分它们，这里 $\varepsilon < |b - a|/2$，从而可知其为 Hausdorff 空间；另一方面，注意到 K 是闭集，若 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_K)$ 是正则空间，从而存在不交开集 U, V 区分 0 和 K，而易见此时存在 $c < 0, d > 0$ 使得 $0 \in (c, d) \setminus K \subseteq U$，设 $1/m < d$，则存在 $1/m$ 的邻域 $(e, f) \subseteq V$，但显然 $(c, d) \setminus K \cap (e, f) \neq \varnothing$，也即 $U \cap V = \varnothing$，因此不是正则空间. □

9.**证明** (1) 推 (2)：若 X 为 Baire 空间，也即任意可数个开稠集的交仍为稠子集，设 $\{A_n\}$ 是 X 的可数个无处稠子集，也即任意 n，$(\overline{A_n})^\circ = \varnothing$，设 $U_n = X \setminus \overline{A_n}$，因此有 U_n 为开稠集，从而有 $X \setminus (\cup\overline{A_n}) = \cap U_n$ 为稠子集，从而我们有 $(\cup A_n)^\circ \subseteq (\cup\overline{A_n})^\circ = (X \setminus \cap U_n)^\circ$，注意到 $A^\circ = X \setminus \overline{A^c}$，因此上式可进一步写成 $X \setminus (\overline{\cap U_n}) = X \setminus X = \varnothing$，即证；

(2) 推 (3)：回忆第二纲集是指非第一纲集，也即不是可数个无处稠密集的并，反证法，若有开集 $U = \cup A_n$，其中 A_n 为无处稠密集，因此有 $U = U^\circ = (\cup A_n)^\circ = \varnothing$，矛盾！

(3) 推 (1)：要证 X 是 Baire 空间，即对任意可数多个开稠集 $\{U_n\}$，证其交仍为稠集，反证法，若有 $\cap U_n$ 不稠，则存在开集 V 使得 $V \cap (\cap U_n) = \varnothing$，也即 $V = \cup((X \setminus U_n) \cap V)$，由 U_n 为开稠集，从而 $X \setminus U_n$ 为无处稠密集，因此交上 V 后仍为无处稠密集，进而可知 V 为第一纲集，矛盾！ □

13.**证明** 注意到 f 连续，从而任意 $D \subseteq X$，有 $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$，因此若 D 是 X 中的开稠集，则由 f 开连续，且 $Y = f(X) = f(\overline{D_n}) = \overline{f(D_n)}$，于是 $f(D_n)$ 也为开稠集.

对偶地，我们说明若 A 是 Y 的无处稠密集，则 $f^{-1}(A)$ 是 X 的无处稠密集，若不然，则 $(\overline{f^{-1}(A)})^\circ \neq \varnothing$，因此存在开集 $U \subseteq \overline{f^{-1}(A)}$，注意到 f 连续，从而 $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$，且后者为闭集，因此 $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$，进而 $f(U) \subseteq f(f^{-1}(\overline{A})) \subseteq \overline{A}$，这与 A 为无处稠密矛盾.

因此我们选择上述一个事实即可完成证明，以第二个为例，若 $Y = f(X)$ 不为 Baire 空间，从而存在开集 A 为可数个无处稠密集 $\{A_n\}$ 的并，因此 $f^{-1}(A) = \cup f^{-1}(A_n)$，则 $f^{-1}(A)$ 为 X 中开集，且为可数个无处稠密集的并，矛盾！

□

9 练习 6.1

1.**证明** 回忆正则空间是指可以用开集区分点和闭集，等价地也可理解为每一点都有闭邻域，从而对由映射族 $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ 生成的初始拓扑，且 Y_i 为正则空间，则任取一点 x 及其开邻域 U，从而存在子基中的元素相交得到的基包含于 U，也即有 $\cap_{i\le n} f_i^{-1}(U_i)$，其中 U_i 为 Y_i 中开集，进而由 Y_i 正则，因此由 $f_i(x) \in U_i$，存在闭集 V_i 使得 $f_i(x) \subseteq V_i^\circ \subseteq V_i \subseteq U_i$，因此有闭集 $V = \cap_{i\le n} f_i^{-1}(V_i)$，进而有 $x \in \cap_{i\le n} f_i^{-1}(V_i^\circ) \subseteq V^\circ \subseteq V \subseteq U$，即证正则. □

2.**证明** 对 T_0，任给 $x \ne y \in X$，从而存在 $j \in J$ 使得 $f_j(x) \ne f_j(y)$，由 Y_j 为 T_0 空间，因此有开集 V 使得不妨 $f_j(x) \in V$，但 $f_j(y) \notin V$，因此 $x \in f_j^{-1}(V)$，$y \notin f_j^{-1}(V)$，从而表明 X 是 T_0 的，其余都是类似的，人生苦短，证明从略. □

4.**证明** 这是管形引理的一个直接推广，只需要对 H 中每个点用一下管形引理，再结合 H 紧就可以找到所需要的开集，不再赘述. □

5.**证明** 任意 $(x, y) \notin K$，这里 $K = \{(x, f(x))|x \in X\}$，从而 $y \ne f(x)$，因此由 Y 为 Hausdorff 空间，存在不交开集 U, V 使得 $y \in U$，$f(x) \in V$，则有 $(x, y) \in f^{-1}(V) \times U$，且若有 $(z, f(z)) \in f^{-1}(V) \times U$，则 $z \in f^{-1}(V)$，$f(z) \in U$，即 $f(z) \in U \cap V$ 矛盾！即知 K 为闭集. □

$\boxed{\text{注：}}$若取 $Y = X$，以及 $f = \mathrm{id}_X$，则为 [1] 中的命题 6.1.6.

9.**证明** (a) 这是容易的，依次验证对称性、正定性以及三角不等式即可；

(b) 为证明不同的度量诱导相同的拓扑，最省力的办法是验证对同一序列，具有相同的敛散性，有了这个想法，验证也是不难的；

(c) 显然. □

10.**证明** 考虑映射 $h : U \to \mathbb{R}$，$h(x) = \dfrac{1}{d(x, X \setminus U)}$，从而取 $V = \{(x, h(x))|x \in U\} \subseteq X \times \mathbb{R}$，构造 $f : U \to V$，$f(x) = (x, h(x))$，以及 $\pi : (x, h(x)) \mapsto x$，从而不难有 f 和 π 互为逆映射，为证 f 和 π 的连续性，只需对任意收敛序列证明保持序列收敛即可，不难结合 $\dfrac{1}{d(x, X \setminus U)}$ 的连续性得到. 从而可知 U 和 V 同胚. 为了说明 V 是闭集，只需要利用 h 连续和 $\mathbb{R}$ 是 Hausdorff 空间即可 (练习 6.1 题 5). □

12.**证明** 设 X_1, X_2 序列紧，从而对 $X_1 \times X_2$ 中的序列 $\{(x_n, y_n)\}$，则对 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，进一步对 $\{y_{n_k}\}$，有收敛子列 $\{y_{n_{k_l}}\}$，故 $\{(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})\}$ 是 $\{(x_n, y_n)\}$ 的收敛子列，即证. □

10　练习 6.2

1.**证明** 回忆第一可数是指有可数个邻域基，从而对 $X=\prod X_i$，任意 $x=(x_i)\in X$，则每个 x_i，设其有可数邻域基 $\{U_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$，则考虑 $\mathcal{N}(x)=\{\cap_{j\le k}p_{i_j}^{-1}(U_{n_j}^{i_j})|i_j\in I,n_j\in\mathbb{N}\}$，一方面显然其可数，另一方面任取 x 邻域 U，则有 $\prod_{j\le k}U^{i_j}\times\prod_{i\neq i_j}X_i\subseteq U$，这里 U^{i_j} 为 X_{i_j} 中开集，因此由 $\{U_{n_j}^{i_j}\}$ 为邻域基，因此有 $U_{n_j}^{i_j}\subseteq U^{i_j}$，进而 $\cap_{j\le k}p_{i_j}^{-1}(U_{n_j}^{i_j})\in\mathcal{N}(x)$ 包含于 U，即证 $\mathcal{N}(x)$ 为可数邻域基，从而第一可数.

第二可数空间可数乘的证明是完全类似的，仿照上述即可.

下面我们构造一个例子说明第一可数与第二可数均不为任意可乘的，考虑 $X=\{0,1\}$，赋予离散拓扑，J 为一不可数集，从而对 X^J，0^J 的邻域基形如 $\mathcal{N}=\{\cap_{i\le k}p_{j_i}^{-1}(0)|j_i\in J\}$，则对 $\mathcal{N}$ 中任意可数个元素，可将出现的所有指标排列成一个可数集，而指标集 J 不可数，这意味着一定有一个指标 $j\in J$ 未出现，从而 $p_j^{-1}(0)$ 不含于选出这可数个元素中的任一个，因此表明 $\mathcal{N}$ 不存在可数个元素生成，进而 X^J 不第一可数，也即不第二可数. □

2.**证明** 设 $X=\prod X_i$，任意 X_i 均为 T_0 空间，从而任取 $x=(x_i)\neq y=(y_i)\in X$，则必存在 $i\in I$ 使得 $x_i\neq y_i$，进而由 X_i 为 T_0 空间，从而不妨存在开集 $U_i\subseteq X_i$ 使得 $x_i\in U_i$，$y_i\notin U_i$，则有 $x\in U_i\times\prod_{j\neq i}X_j$，$y\notin U_i\times\prod_{j\neq i}X_j$，因此 X 为 T_0 空间，进而 T_0 可数可乘，至于 T_1，T_2 都是完全类似的，不再赘述. □

3.**证明** 不难验证是度量，唯一需要费点口舌的是三角不等式，但也不困难，略去. 为了验证诱导相同的拓扑，我们只需要说明对收敛序列相同，因此若 $\{x^k\}\subseteq\prod X_n$ 按乘积拓扑收敛到 x，则等价于按每个分量对应收敛，等价于每个分量按度量收敛，因此利用 ρ 的表达式可知等价于按度量收敛到 x，因此可知诱导的拓扑相同. □

6.**证明** 由 [1] 的命题 6.2.2 可知 C 同胚于 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，其中 $\{0,1\}$ 赋予离散拓扑，因此我们只需要证 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 和 $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 同胚即可，显然 $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 紧，且 $Y=\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 为 Hausdorff(因为 T_2 可数可乘)，从而只需要构造一个从 X 到 Y 的连续双射即可.

注意到 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可数，从而与 $\mathbb{N}$ 等势，因此可构造一个完全一一映射 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，使得对 X 中元素 (x^n)，以及 Y 中元素 $(x^{(s,t)})$，定义双射 $f:X\to Y$，$(x^n)\mapsto(x^{\varphi(n)})$，这里 $x\in\{0,1\}$，下面证明连续性，只需对 $p_n:Y\to X$，证明 $p_n\circ f$ 连续即可，进一步我们只需对 X 的子基 $\{p_m^{-1}(0),p_m^{-1}(1)|m\in\mathbb{N}\}$，证明其在 $f^{-1}\circ p_n^{-1}$ 下仍为开集，而注意到 $f^{-1}\circ p_n^{-1}\circ p_m^{-1}(0)=p_{\varphi^{-1}(n,m)}^{-1}(0)$ 为开集，另一个同理，从而可知这是连续的，即证同胚. □

$\boxed{\text{锐评：}}$没马玩意儿.

7.**证明** 由 C 同胚于 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，我们只需证后者没有孤立点即可，而回忆孤立点意味着存在

其一个邻域使得只有其自己，因此我们只需对每个基中元素说明其不只含一个点即可，而基形如 $p_1^{-1}(x_1) \cap \cdots p_k^{-1}(x_k)$，这里 $x_i = 0, 1$，从而对每个这样的基，注意到总至少含点 $x^1 = (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$ 和 $x^2 = (x_1, \cdots, x_n, 1, 1, \cdots)$，即证. $\square$

8.**证明** 这是经典的对角线法，设有序列 $\{x^n\}$，每个 $x^n = (x_1^n, x_2^n, \cdots, x_k^n, \cdots)$，记 $k_i^0 = i$，任意 $i \in \mathbb{N}$，由 X_1 序列紧，从而存在 k_i^1 使得 $\{x_1^{k_i^1}\}$ 为 $\{x_1^n\}$ 收敛子列，且收敛到 x_1，进而归纳，假设 $\{k_i^n\}$ 已经构造好，且使得 $\{x_t^{k_i^t}\}$ 收敛到 x_t，进一步在 $\{x_{n+1}^{k_i^n}\}$ 中存在收敛子列，记为 $\{x_{n+1}^{k_i^{n+1}}\}$，收敛到 x_{n+1}，因此我们考虑 $\{x^n\}$ 的子列 $\{x^{k_n^n}\}$，对其每个分量如 $\{x_t^{k_n^n}\}$，当 $n > t$ 时，收敛到 x_t，从而可知 $(x^{k_n^n})$ 收敛到 (x_n). $\square$

11 练习 6.3

1.**证明** (a) 回忆商映射的定义无非就是满射 + 集合开当且仅当原像开，从而由 f, g 都是商映射，不难有 $g \circ f$ 是满射，进一步任取 W 为 Z 开集，从而 $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ 在 X 中开，另一方面若 $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 在 X 中开，则 $g^{-1}(W)$ 在 Y 中开，进而 W 在 Z 中开，即证为商映射.

(b) 首先任取 $z \in Z$，则由 $g \circ f$ 满可知存在 $x \in X$，$g(f(x)) = z$，进而 $f(x) \in Y$，从而 g 为连续满射，若对 $W \in Z$ 且 $g^{-1}(W)$ 为 Y 中开集，则由 f 连续，从而 $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 为 X 中开集，进而由 $g \circ f$ 为商映射，从而 W 为 Z 中开集，即证 g 为商映射. □

2.**证明** 由 f 已经为连续满射，从而我们只需说明任取 V 为 Y 子集，若 $f^{-1}(V)$ 为 X 中开集，
□

5.**证明** 要证明一个商空间和一个拓扑空间同胚，就是要构造一个从原空间到拓扑空间的商映射，且商映射下的等价关系恰好就是商掉的部分. 从而考虑 $f : [0,1] \to \cup S_n$，其中当 $x \in (1/(n+1), 1/n)$ 时，定义 $f(1/(n+1)) = f(1/n) = 0$，区间内点依次映在 S_n 上，易见 f 满，且 $E(f) = A$，任取 $\cup S_n$ 中开集 U，其赋予的是 $\mathbb{R}^2$ 子空间拓扑，从而 $U = \widetilde{U} \bigcap \cup S_n$，若 $(0,0) \notin U$，则 U 为有限段开圆弧的并，进而 $f^{-1}(U)$ 为有个开区间的并为开集，若 $(0,0) \in U$，则有 $f^{-1}(U)$ 为可数个开区间的并，从而有 f 连续，又注意到 $[0,1]$ 紧，$\cup S_n$ 为 Hausdorff 空间，从而 f 为闭映射，进而 f 为商映射，即证 $[0,1]/E(f) = [0,1]/A$ 同胚于 $\cup S_n$. □

8.**证明** 设 $\pi : X \to X/E(f)$ 为商映射，从而 f 连续，则诱导出的 $\overline{f} : X/E(f) \to Y$ 也连续，从而任取 $[x] \neq [y] \in X/E(f)$，则有 $f(x) \neq f(y)$，也即 $\overline{f}([x]) \neq \overline{f}([y])$，从而由 Y 为 Hausdorff 空间，存在不交开集 V_1, V_2 使得 $\overline{f}([x]) \in V_1$，$\overline{f}[y] \in V_2$，则考虑 $U_i = \overline{f}^{-1}(V_i)$，则 U_1, U_2 分别为 $[x], [y]$ 的开邻域，若存在 $[z] \in U_1 \cap U_2$，则有 $f(z) = \overline{f}([z]) \in V_1 \cap V_2$，矛盾！从而可知 $X/E(f)$ 是 Hausdorff 空间. □

9.**证明** 任取 $[x] \neq [y] \in X/E$，从而 $(x,y) \notin E$，由 E 为 $X \times X$ 中开集，因此存在 X 中开集 U, V 使得 $(x,y) \in U \times V$，且 $(U \times V) \cap E = \varnothing$，进而由 q 为开映射，从而 $[x] \in q(U)$，$[y] \in q(V)$，若有 $[z] \in q(U) \cap q(V)$，则存在 $z_1 \in U$，$z_2 \in V$，使得 $[z_1] = [z_2] = [z]$，从而 $(z_1, z_2) \in (U \times V) \cap E$，即证 X/E 为 Hausdorff 空间. □

12 练习 7.1

1.**证明** 若 X 不能写成两个非空分离集的并，且反证法，若 X 不连通，从而存在不交闭集 A, B 使得 $A\cup B=X$，因此 A, B 为分离集，矛盾！另一方面，若 X 连通，且能写成两个非空分离集 A, B 的并，从而由 $\overline{A}\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=X$，进而 $B=X\setminus\overline{A}$ 为开集，同理 A 为开集，因此 X 可写成不交开集的并，与连通矛盾！ □

2.**证明** 注意到连通是拓扑性质，从而 $f(X)$ 为 $\mathbb{R}$ 的连通子集，进而为区间. □

3.**证明** 内容... □

4.**证明** 挖点即可，一个不够就挖两个. □

5.**证明** 注意到 $(A\times B)^c=(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)$，取定 $b\in B^c$，任给 $x\in A^c$，有 $\{x\}\times Y$ 和 $X\times\{b\}$ 均连通，且 $(x,b)\in(\{x\}\times Y)\cap(X\times\{b\})$，从而可知 $T_x=(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{b\})$ 为连通空间，同理取定 $a\in A^c$，对任意 $y\in Y$，有 $T_y=(\{a\}\times Y)\cup(X\times\{y\})$ 为连通空间，显然 $(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)=\bigcup\limits_{x\in A^c}T_x\bigcup\limits_{y\in B^c}T_y$，且所有 $T.$ 的交为 (a,b)，故 $A\times B$ 补集连通. □

13 练习 7.2

1.**证明** 设 $t_0 = \sup\{t|\gamma(t) \in A\}$，注意到 $\gamma(1) \notin A$，从而 $t_0 \in [0,1]$，若 $\gamma(t_) \in A^\circ$，从而存在 $\delta > 0$，$\gamma(t_0-\delta, t_0+\delta) \in A^\circ$，矛盾，同理可知 $\gamma(t_0) \notin (A^c)^\circ$，而 $X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (A^c)^\circ$ 为不交并，进而可知 $\gamma(t_0) \in \partial A$，即证. □

2.**证明** 任取 $a < b \in \mathbb{R}$，则考虑道路 $\gamma(t)$，使得 $\gamma(0) = a$，$\gamma((0,1]) = b$，从而显然 γ 连续即为一条道路，即证道路连通. □

5.**证明** $\mathbb{R}^2$ 上任两点之间存在不可数多条完全不交的道路，则必存在一条上无 A 的点. □

14 练习 8.1

2.证明 一方面若 $F=f^{-1}(0)$，则 $F=f^{-1}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left[0,\frac{1}{n}\right)\right)=\bigcap_{n\geq 1}f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right)\right)$ 从而为可数个开集的交；另一方面，若 $F=\cap G_n$，这里 G_n 为开集，设 $V_n=\cap_{i\leq n}G_i$ 也为开集，从而 $F\cap V_n^c=\varnothing$，进而两个为不交闭集，从而对正规空间 X，考虑 Urysohn 引理，存在连续函数 $f_n:X\to[0,1]$，使得 $f_n(F)=\{0\}$，$f_n(V_n^c)=\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$，从而考虑 $f:X\to[0,1]$，$f=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}f_n$，因此由一致收敛可知 f 连续，且 $f(F)=\{0\}$，又注意到，若 $x\notin F$，则存在 n 使得 $x\in V_n^c$，因此 $f(x)\geq\frac{1}{n^2}$，进而可知 $F=f^{-1}(0)$，即证. □

4.证明 (a) 由 $\bigcup_{i=1}^{n}U_i=X$，从而有 $\bigcap_{i=2}^{n}U_i^c\subseteq U_1$，由 X 正规，从而存在开集 V_1，使得 $\bigcap_{i=1}^{n}U_i^c\subseteq V_1\subseteq\overline{V_1}\subseteq U_1$，进一步由 $\bigcap_{i=2}^{n}U_i^c\subseteq V_1$，则 $\bigcap_{i=3}^{n}U_i^c\cap V_1^c\subseteq U_2$，故再次利用 X 正规，可知存在开集 V_2 使得 $\bigcap_{i=3}^{n}U_i^c\cap V_1^c\subseteq V_2\subseteq\overline{V_2}\subseteq U_2$，由此不难归纳得到一列开集 V_k 满足

$$\bigcap_{i=k+1}^{n}U_i^c\cap V_1^c\cap\cdots\cap V_{k-1}^c\subseteq V_k\subseteq\overline{V_k}\subseteq U_k,$$

因此有 $\bigcup_{i=1}^{n}V_i=\left(\bigcap V_i^c\right)^c=X$，且显然 $\overline{V_i}\subseteq U_i$，即符合要求.

(b) 由 $U_1,\cdots,U_n$ 为开集，且 $\bigcup_{i=1}^{n}U_i=X$，故由 (a) 可知，存在开集 $\{I_k\}$ 和 $\{V_k\}$ 使得 $\bigcup_{i=1}^{n}U_i=X$，且任意 $1\leq k\leq n$ 有 $I_k\subseteq\overline{I_k}\subseteq V_k\subseteq\overline{V_k}\subseteq U_k$，因此由 Uryshon 引理，存在连续函数 $g_i:X\to[0,1]$，有 $g_k(\overline{I_k})=1$，$g_k(V_k^c)=0$，从而有 $g_k^{-1}((0,1])\subseteq V_k$，进而 $\overline{g_k^{-1}((0,1])}\subseteq\overline{V_k}\subseteq U_k$，又由 $\cup I_k=X$，从而 $\sum_{k=1}^{n}g_k(x)\neq 0$，故考虑 $f_k(x)=\frac{g_k(x)}{\sum_{k=1}^{n}g_k(x)}$，可知为满足要求的函数构造. □

6.证明 一方面，若 X 完全正规，从而对任意分离集 A,B，由子空间 $Y=X\setminus(\overline{A}\cap\overline{B})$ 中，其也为正规空间，且有 $\overline{A}\cap Y$ 和 $\overline{B}\cap Y$ 为 Y 中不交闭集，从而存在 X 中开集 U,V 使得 $U\cap Y$ 和 $V\cap Y$ 分离这两个闭集，且此时 $U\cap V\cap Y=\varnothing$，即 $U\cap V\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，从而为了分离 A,B，只需要取 $U'=U\setminus\overline{B}$ 和 $V'=V\setminus\overline{A}$ 即可.

另一方面，任取子空间 A，以及 X 中闭集 U,V，且 $(U\cap A)\cap(V\cap A)=\varnothing$，则我们断言 $U\cap A$ 和 $V\cap A$ 是分离集，任取 $x\in V\cap A$，若 $x\in\overline{U\cap A}$，则 $x\in\overline{U}=U$，进而 $x\notin V\cap A$，矛

盾！因此存在 M,N 不交，使得 $U\cap A\subseteq M$，$V\cap A\subseteq N$，因此取 $M'=M\cap A$，$N'=N\cap A$ 即符合题意. $\square$

补：证明：若正规空间的子集 A 能写成可数个闭集的并，则子空间 A 是正规空间.

证明 设 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$，$F_i$ 均为 X 中的闭集，任取 A 中不交闭集 $\widetilde{U},\widetilde{V}$，则存在 X 中闭集 U,V 使得 $\widetilde{U}=U\cap A$，$\widetilde{V}=V\cap A$，且 $U\cap V\cap A=\varnothing$，也即任意 i，有 $U\cap V\cap F_i=\varnothing$，也即有任意 i,j，$(U\cap F_i)\cap(V\cap F_j)=\varnothing$，注意到 $U\cap F_i$ 与 $V\cap F_j$ 均为闭集且不交，从而由 X 为正规空间，可知存在开集 B_{ij},C_{ij} 使得 $U\cap F_i\subseteq B_{ij}$，$V\cap F_j\subseteq C_{ij}$，且 $B_{ij}\cap C_{ij}=\varnothing$，进而考虑 $D_i=\bigcap\limits_{j=1}^{i}B_{ij}$，$E_j=\bigcap\limits_{i=1}^{j}C_{ij}$，从而易见每个 D_i,E_j 均为开集，且 $U\cap F_i\subseteq D_i$，$V\cap F_j\subseteq E_j$，且任意 i,j 均有 $D_i\cap E_j=\varnothing$，进而取 $D=\cup D_i$，$E=\cup E_j$，有 $D\cap E=\varnothing$，且 $U\cap A\subseteq D$，$V\cap A\subseteq E$，则 $D\cap A$ 和 $E\cap A$ 为 A 中开集且恰分离 $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{V}$. $\square$

15 练习 9.1

1.**证明** 一方面，若存在 $\mathcal{G} \in \mathscr{F}(X)$，使得 $x \in \mathrm{lim}\mathcal{G}$，以及 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$，则有 $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{G}$，进而任取 $U \in \mathcal{N}(x)$，$A \in \mathcal{F}$，又 $A, U \in \mathcal{G}$，从而结合 $\mathcal{G}$ 为滤子，则存在非空集合 $C \subseteq A \cap N$，从而可知 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{N}(x)$ 相容，即证 $x \in \mathrm{clust}\mathcal{F}$.

另一方面，若 $x \in \mathrm{clust}\mathcal{F}$，则 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{N}(x)$ 相容，进而考虑子集族

$$\mathcal{G} = \{U \cap A | U \in \mathcal{N}(x), F \in \mathcal{F}\},$$

不难验证 $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{G}$，且 $\mathcal{G}$ 为滤子，即证. □

2.**证明** 注意 $f(\mathcal{F})$ 为滤子，由 $f^{-1}(F)$ 即那些滤子中集合的原像组成，而 $f(\mathrm{lim}\mathcal{F})$ 单纯为集合的像.

(1) 推 (2)：若 f 连续，从而任意 $x \in \mathrm{lim}\mathcal{F}$，从而 $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$，从而为证明 $f(\mathrm{lim}\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{lim}f(\mathcal{F})$，只需证 $\mathcal{N}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{F})$，任给 $V \in \mathcal{N}(f(x))$，则 $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$，从而 $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$，进而 $V \in f(\mathcal{F})$，即证.

(2) 推 (3)：由超滤也为滤子，即证.

(3) 推 (1)：任取 $x \in X$，我们证 f 在 x 处连续，任取包含滤子 $\mathcal{N}(x)$ 的超滤 $\mathcal{G}$，从而由 $f(\mathrm{lim}\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{lim}f(\mathcal{G})$，不难有 $x \in \mathrm{lim}\mathcal{G}$，则 $f(x) \in \mathrm{lim}f(\mathcal{G})$，从而 $\mathcal{N}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{G})$，即任取 $U \in \mathcal{N}(f(x))$，有 $f^{-1}(U) \in \mathcal{G}$，又注意到任意滤子都可以写成一族超滤的交，从而设 $\mathcal{N}(x) = \cap\mathcal{G}_\lambda$，则 $f^1(U) \in \cap\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{N}(x)$，即证. □

16 练习 9.2

1.**证明** 为了证明 X 是完全正则空间，则对任意 x 与包含其的开集 U，存在 $V\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in V\subseteq U$，且 V 既开又闭，从而 V^c 也既开又闭，因此定义 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(V)=0$，$f(V^c)=1$，则显然 f 连续，且 $f(x)=0$，$f(X\setminus U)\subseteq f(V^c)=\{1\}$，即证. □

3.**证明** 当 C 为空集的时候，显然取 $k\equiv 1$ 即可；当 C 不为空集时，由 X 为完全正则空间知，任意 $x\in C$，存在连续函数 $f_x:X\to[0,1]$ 使得 $f_x(x)=0$，且 $f_x(X\setminus U)\subseteq\{1\}$，因此自然想到 $V_x=f_x^{-1}([0,-1/2)$ 为包含 x 的一个开邻域，从而其构成了 C 的一个开覆盖，进而存在有限子覆盖 $\{V_{x_k}\}_{1\leq k\leq n}$，一个自然的想法是取 $\prod f_{x_k}$，但这不一定保证在 C 上为 0，因此考虑 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$，有 $\varphi(y)=0$，当 $0\leq y<1/2$，$\varphi(y)=2(y-1/2)$，当 $1/2\leq y\leq 1$，则对 $k_x=\varphi\circ f_x$，此时有 $k_x(V_x)=0$，进而考虑 $k=\prod\limits_{k=1}^{n}k_{x_k}$，则 $k(C)=0$，且显然 $k(X\setminus U)=1$，综上我们完成了证明. □

17 练习 9.4

1.**证明** 设 X 为菊部紧空间，从而设 $Y = f(X)$ 为开连续像，则任意 $y = f(x) \in Y$，以及邻域 V，则 $f^{-1}(V)$ 为 x 开邻域，进而存在紧集 K 使得 $x \in K^\circ \subseteq K \subseteq f^{-1}(V)$，因此有 $y \in f(K^\circ) \subseteq (f(K))^\circ \subseteq f(K) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V$，即证 Y 局部紧. $\square$

3.**证明** 任取 $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in \prod X_k$，则对其邻域 U，存在开集 $U_k \subseteq X_k$，使得 $(x_k) \in \prod U_k \subseteq U$，又每个 X_k 局部紧，从而存在紧集 W_k 使得 $x_k \in W_k^\circ \subseteq W_k \subseteq U_k$，进而可知 $\prod W_k$ 为紧集，进而 $(x_k) \in \prod W_k^\circ \subseteq (\prod W_k)^\circ \subseteq \prod W_k \subseteq U$，即证局部紧是有限可乘性质. $\square$

4.**证明** 一方面，若每个 X_i 局部紧，且仅有有限个空间非紧，则任意 $(x_i) \in \prod X_i$，以及其开邻域 U，则存在 $\prod U_{i_k} \times \prod X_j$，从而不难由每个 X_{i_k} 局部紧以及 Tychonoff 乘积定理可知 (x_i) 有紧邻域，即证.

另一方面，若 $\prod X_i$ 局部紧，则对任意投影映射为开连续满射，则可知 X_i 局部紧，进而对任意 (x_k) 开邻域 U，有紧集 K，使得 $K^\circ \subseteq K \subseteq U$，进而存在 $V = \prod U_{i_k} \times \prod X_j \subseteq K^\circ \subseteq K$，这里 i_k 只有有限个，进而有 $X_j = p_j(V) \subseteq p_j(F) \subseteq X_j$，因此 $X_j = p_j(F)$ 为紧集，即证. $\square$

5.**证明** 注意到 $\alpha\mathbb{N}$ 为紧空间，且开集为 $\mathbb{N}$ 离散拓扑并上包含 ∞ 的无限集，注意到 $Y = \{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ 为 Hausdoff 空间，从而只需要构造一个连续双射即可. 考虑 $f : \alpha\mathbb{N} \to \{0\} \cup \{1/n\}$，其中 $f(n) = 1/n$，$f(\infty) = 0$，则对 Y 的任一开集 U，则若 U 不含 0，则可知 $f^{-1}(U)$ 为 $\mathbb{N}$ 的子集，从而为开集；若 U 含 0，从而 Y 中一定只有有限多元素不在 U 中，从而也可知 $f^{-1}(U)$ 为 $\alpha\mathbb{N}$ 开集，可知 f 连续，综上即证同胚. $\square$

6.**证明** 若 $A = V \cap F$，V 为 X 开子空间，从而局部紧，又 F 为闭集，从而 $V \cap F$ 为 V 的闭子空间，从而也局部紧，进而可知 $A = V \cap F$ 为 X 的局部紧空间.

$\square$

12.**证明** 将 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中的元素记为 $[a]$，从而设商映射为 q 为连续满射，任取 $[0]$ 的邻域 V，设 $q^{-1}(V) = V'$ 为开集，且为任意 $n \in \mathbb{N}$ 的开邻域，也即存在 $k_n < 1/3$ 使得 $(n-k_n, n+k_n) \subseteq V'$，剩下的都是臭长的论述，略去. $\square$

18 2022 点集拓扑期末试题

Problem 1. (10 分) 设 $\mathcal{O}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑，定义

$$\mathcal{O}' = \{U \in \mathcal{O} | \mathbb{R} \setminus U \text{有界}\} \cup \{\varnothing\},$$

证明：$\mathcal{O}'$ 是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑.

证明 (O1) 显然 $\mathbb{R}$，$\varnothing \in \mathcal{O}'$；

(O2) 若 $U_i \in \mathcal{O}'$，任意 $i \in I$，I 为指标集，从而 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$，且 $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus U_i)$ 显然也有界，因此在 $\mathcal{O}'$ 中；

(O3) 显然也关于有限交封闭，不再赘述. 综上即证. □

Problem 2. (10 分) 证明：平面上以所有直线为子基的拓扑是离散拓扑.

证明 回忆子基有限交组成基，基任意并组成拓扑，因此注意到任意平面上一点可由两条直线交出，进而该拓扑的基是全体离散点，由此不难得到该拓扑为离散拓扑. □

Problem 3. (10 分) 证明：闭区间 $[0, 1]$ 和单位圆周 S^1 不同胚.

证明 反证法，若同胚，则对同胚 f，$[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ 和 $S^1 \setminus f(1/2)$ 仍同胚，但前者不连通，后者连通，矛盾！(或者由 $\pi_1([0, 1]) = 0$，$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$，基本群不同构，因此不同胚.) □

Problem 4. (10 分)F 是 X 的闭子集，$A \subseteq X$，证明：$(F \cup A^\circ)^\circ = (F \cup A)^\circ$.

证明 练习 4.1 题目 4. □

Problem 5. (10 分) 证明：Sorgenfrey 直线 $\mathbb{R}_\ell$ 是第一可数的，且是可分的，但不是第二可数的.

证明 注意到任意 $x \in \mathbb{R}_\ell$，$\{[x, x+1/n) | n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 的一个可数邻域基，又注意到 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}_\ell$ 的可数稠子基，因此 $\mathbb{R}_\ell$ 是第一可数且可分的拓扑空间.

下面反证 $\mathbb{R}_\ell$ 不是第二可数的，若不然，存在可数基 $\mathcal{B}$，则任意 $x \in \mathbb{R}_\ell$，有 $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$，从而 x 为 B_x 的最小元，也即 $x \neq y$，则 $B_x \neq B_y$，从而必有 $\mathcal{B}$ 不可数，矛盾！ □

注：第二可数空间总是第一可数且可分，因此上述例子说明反向不成立.

Problem 6. (10 分) 证明：第二可数空间的开连续像第二可数.

证明 设 $f: X \to Y$ 为开连续映射，且 $Y = f(X)$，若 X 第二可数，从而有可数基 $\mathcal{B}$，我们断言 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的可数基，可数性显然，任取 V 为 Y 的开集，从而有 $f^{-1}(V)$ 为 X 中开集，故存在 $1 \leq i \leq n$，$U_i \in \mathcal{B}$ 使得 $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_n$，进一步结合 f 满射，故 $V = f(f^{-1}(V)) = f(U_1 \cup \cdots \cup U_n) = f(U_1) \cup \cdots \cup f(U_n)$，从而可知 $f(\mathcal{B})$ 为 Y 可数基. □

Problem 7. (10 分) 设 U 是度量空间 X 的开集，证明 U 同胚于 $X \times \mathbb{R}$ 的一个闭子集.

证明 考虑映射 $h: U \to \mathbb{R}$，$h(x) = \dfrac{1}{d(x, X \setminus U)}$，从而取 $V = \{(x, h(x)) | x \in U\} \subseteq X \times \mathbb{R}$，构造 $f: U \to V$，$f(x) = (x, h(x))$，以及 $\pi: (x, h(x)) \mapsto x$，从而不难有 f 和 π 互为逆映射，为证 f 和 π 的连续性，只需对任意收敛序列证明保持序列收敛即可，不难结合 $\dfrac{1}{d(x, X \setminus U)}$ 的连续性得到. 从而可知 U 和 V 同胚. 为了说明 V 是闭集，只需要利用 h 连续和 $\mathbb{R}$ 是 Hausdorff 空间即可 (练习 6.1 题 5). □

Problem 8. (10 分) 证明：Cantor 集 C 同胚于自身的可数次幂 $C^{\mathbb{N}}$.

证明 由 [1] 的命题 6.2.2 可知 C 同胚于 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，其中 $\{0,1\}$ 赋予离散拓扑，因此我们只需要证 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 和 $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 同胚即可，显然 $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 紧，且 $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 为 Hausdorff(因为 T_2 可数可乘)，从而只需要构造一个从 X 到 Y 的连续双射即可.

注意到 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数，从而与 $\mathbb{N}$ 等势，因此可构造一个完全一一映射 $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，使得对 X 中元素 (x^n)，以及 Y 中元素 $(x^{(s,t)})$，定义双射 $f: X \to Y$，$(x^n) \mapsto (x^{\varphi(n)})$，这里 $x \in \{0,1\}$，下面证明连续性，只需对 $p_n: Y \to X$，证明 $p_n \circ f$ 连续即可，进一步我们只需对 X 的子基 $\{p_m^{-1}(0), p_m^{-1}(1) | m \in \mathbb{N}\}$，证明其在 $f^{-1} \circ p_n{-1}$ 下仍为开集，而注意到 $f^{-1} \circ p_n^{-1} \circ p_m^{-1}(0) = p_{\varphi^{-1}(n,m)}^{-1}(0)$ 为开集，另一个同理，从而可知这是连续的，即证同胚. □

Problem 9. (10 分) 设 X 为拓扑空间，Y 为 Hausdorff，且 $f: X \to Y$ 连续，证明：$X/E(f)$ 为 Hausdorff.

证明 设 $\pi: X \to X/E(f)$ 为商映射，从而 f 连续，则诱导出的 $\overline{f}: X/E(f) \to Y$ 也连续，从而任取 $[x] \neq [y] \in X/E(f)$，则有 $f(x) \neq f(y)$，也即 $\overline{f}([x]) \neq \overline{f}([y])$，从而由 Y 为 Hausdorff 空间，存在不交开集 V_1, V_2 使得 $\overline{f}([x]) \in V_1$，$\overline{f}[y] \in V_2$，则考虑 $U_i = \overline{f}^{-1}(V_i)$，则 U_1, U_2 分别为 $[x], [y]$ 的开邻域，若存在 $[z] \in U_1 \cap U_2$，则有 $f(z) = \overline{f}([z]) \in V_1 \cap V_2$，矛盾！从而可知 $X/E(f)$ 是 Hausdorff 空间. $\square$

Problem 10. (10 分) 证明拓扑空间 X 可数紧当且仅当 X 中任意序列有聚点.

证明 一方面，若 X 可数紧，从而任取无限子集中的一个序列 $A = \{x_n\}$，若序列无凝聚点，即任意 $x \in X \setminus A$，存在 x 开邻域 V 使得 $V \cap A = \varnothing$，进而可知 A 为闭集，进一步任意 $x_n \in A$，有开邻域 U_n 使得 $U_n \cap A = \{x_n\}$，否则 x_n 为 A 的一个凝聚点. 因此考虑 X 的一个可数开覆盖 $\{X \setminus A, U_1, \cdots, U_n, \cdots\}$，则存在有限开覆盖，进而可知有 $U_{i_1} \cap \cdots U_{i_n} = A$，则表明 $A = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}\}$，这与 A 为可数无穷集矛盾！ $\square$

19 2020 点集拓扑期末试题

Problem 1. 证明：$\partial(A\cup B)\subseteq\partial A\cup\partial B$.

证明 回忆 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}$，从而 $\partial(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{A^c\cap B^c}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{A^c\cap B^c}=(\overline{A}\cap\overline{A^c\cap B^c})\cup(\overline{B}\cap\overline{A^c\cap B^c})\subseteq(\overline{A}\cap\overline{A^c})\cup(\overline{B}\cap\overline{B^c})=\partial A\cup\partial B$，即证. □

Problem 2. 设 X 为不可数集，$\mathcal{T}$ 为余可数拓扑，证明：$(X,\mathcal{T})$ 为连通空间.

证明 反证法，若不然，则存在非空开集 A,B 使得 $A\cup B=X$，$A\cap B=\varnothing$，则 $X=X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$，而 A^c 与 B^c 均为可数集，从而 X 可数，矛盾！ □

Problem 3. 设 X 为可数紧致空间，$f:X\to Y$ 为连续映射，证明 $f(X)$ 也是可数紧致空间.

证明 证明同理于紧空间的连续像紧. □

Problem 4. 设 X 为拓扑空间，Y 为 Hausdorff 空间，$f:X\to Y$ 为连续映射，证明 $\{(x,f(x))|x\in X\}$ 是积空间 $X\times Y$ 中的闭子集.

证明 任意 $(x,y)\notin K$，这里 $K=\{(x,f(x))|x\in X\}$，从而 $y\neq f(x)$，因此由 Y 为 Hausdorff 空间，存在不交开集 U,V 使得 $y\in U$，$f(x)\in V$，则有 $(x,y)\in f^{-1}(V)\times U$，且若有 $(z,f(z))\in f^{-1}(V)\times U$，则 $z\in f^{-1}(V)$，$f(z)\in U$，即 $f(z)\in U\cap V$ 矛盾！即知 K 为闭集. □

Problem 5. 设 X 为正规空间，A,B 为其中两个无交的闭集，证明存在开集 U,V 使得 $A\subseteq U$，$B\subseteq V$，$\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$.

证明 由 X 正规，且 A,B 为不交闭集，从而存在不交开集 C,D 区分它们，也即 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$，且 $C\cap D=\varnothing$，又可知每个闭集存在闭邻域，也即存在开集 U,V 使得 $A\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq C$，$B\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq D$，因此 U,V 即符合要求. □

Problem 6. 证明有限补空间是第一可数空间的充分必要条件是其为可数集.

证明 一方面，若 X 为第一可数空间，反证法，若为不可数集，则任意 $x \in X$，若其有可数邻域基 $\mathcal{N}(x)$，从而任意 $U \in \mathcal{N}(x)$，有 U^c 为有限集，因此有 $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{N}(x)} U^c$ 为可数集，进而 $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{N}(x)} U$ 为不可数集，从而任取 y 为交中元素，则考虑 x 的邻域 $A = X \setminus \{y\}$，则若存在 $U \in \mathcal{N}(x)$，使得 $U \subseteq A$，则 $y \in U \subseteq A$，矛盾！

另一方面，若 X 为可数集，则任意 $x \in X$，考虑将 $X \setminus \{x\}$ 中元素重排成 $\{x_n\}_{n \geq 1}$，因此取 $\mathcal{N}(x) = \{X \setminus \{x_1, \cdots, x_k\} | k \in \mathbb{N}^*\}$，从而易见任意 x 邻域 U，$U = X \setminus \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_s}\}$，记 $n = \max\{i_1, \cdots, i_s\}$，则可知有 $\mathcal{N}(x)$ 中元素 $X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ 含于这个开集中，因此此为一个邻域基，又显然其可数，从而可知为一可数邻域基，进而 X 第一可数，综上即证. $\square$

Problem 7. 设 X 为紧致空间，Y 为 T_1 空间，$\{A_i | i = 1, 2, 3 \cdots\}$ 为一个非空闭集下降序列，证明：对连续映射 $f : X \to Y$，有 $f\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} f(A_i)$.

证明 一方面，显然 $f(\cap A_n) \subseteq \cap f(A_n)$，另一方面，注意到 X 紧，因此对单调递减闭集列 $\{A_n\}$，其交 $\cap A_n$ 非空，因此 $\cap f(A_n)$ 非空，任取 $y \in \cap f(A_n)$，则任意 n，存在 $x_n \in A_n$ 使得 $y = f(x_n)$，由 X 紧，因此 $\{x_n\}$ 存在凝聚点 x，从而可知 $x \in \overline{\cap A_n}$，而 A_n 为闭集，从而 $\cap A_n$ 为闭集，因此 $x \in \cap A_n$. 下证 $y = f(x)$，若不然，则由 Y 为 T_1 空间，存在 y 邻域 U，有 $f(x) \notin U$，进而 $x \notin f^{-1}(U)$，而注意到 $x_n \in f^{-1}(U)$，对任意 n，从而这与 x 是 $\{x_n\}$ 聚点矛盾！因此 $y = f(x) \in f(\cap A_n)$，因此 $f(\cap A_n) = \cap f(A_n)$，即证. $\square$

Problem 8. 设 X 和 Y 为两个拓扑空间，证明：映射 $f : X \to Y$ 是开映射当且仅当对任意集合 $B \subseteq Y$ 成立：$(f^{-1}(B))^\circ \subseteq f^{-1}(B^\circ)$.

证明 若 f 为开映射，则有 $f((f^{-1}(B))^\circ)$ 为开集，且包含于 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ 中，因此 $f((f^{-1}(B))^\circ) \subseteq B^\circ$，进而有 $(f^{-1}(B))^\circ \subseteq f^{-1}(f((f^{-1}(B))^\circ)) \subseteq f^{-1}(B^\circ)$，即证.

另一方面，任取开集 U，则有 $U = U^\circ \subseteq (f^{-1}(f(U)))^\circ \subseteq f^{-1}((f(U))^\circ)$，由此可知 $f(U) \subseteq f(f^{-1}(f(U)^\circ)) \subseteq (f(U))^\circ$，因此可知 $f(U)$ 为开集，即证 f 为开映射. $\square$

Problem 9. 证明商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 不为第一可数空间.

20 基础知识

1. $A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$，$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$；
2. $X \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(X \setminus B_i)$，$X \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I}(X \setminus B_i)$；
3. $X \times \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I}(X \times B_i)$，$X \times \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(X \times B_i)$.

设 $f : X \to Y$ 为映射，$A \subseteq X$，$B \subseteq Y$，

1. $f(A) \subseteq B$ 当且仅当 $A \subseteq f^{-1}(B)$；
2. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$，当且仅当 f 为单射时 $A = f^{-1}(f(A))$(记忆：拉回来的会更大)；
3. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$，当且仅当 f 为满射时 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$(记忆：不一定有原像)；
4. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$；
5. $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$，注意另一方向不一定成立如常值映射；
6. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$，$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$，即<u>拉回与交并都可交换</u>.
7. $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$，$f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

参考文献

[1] 张德学. 一般拓扑学基础. 北京：科学出版社，2022.