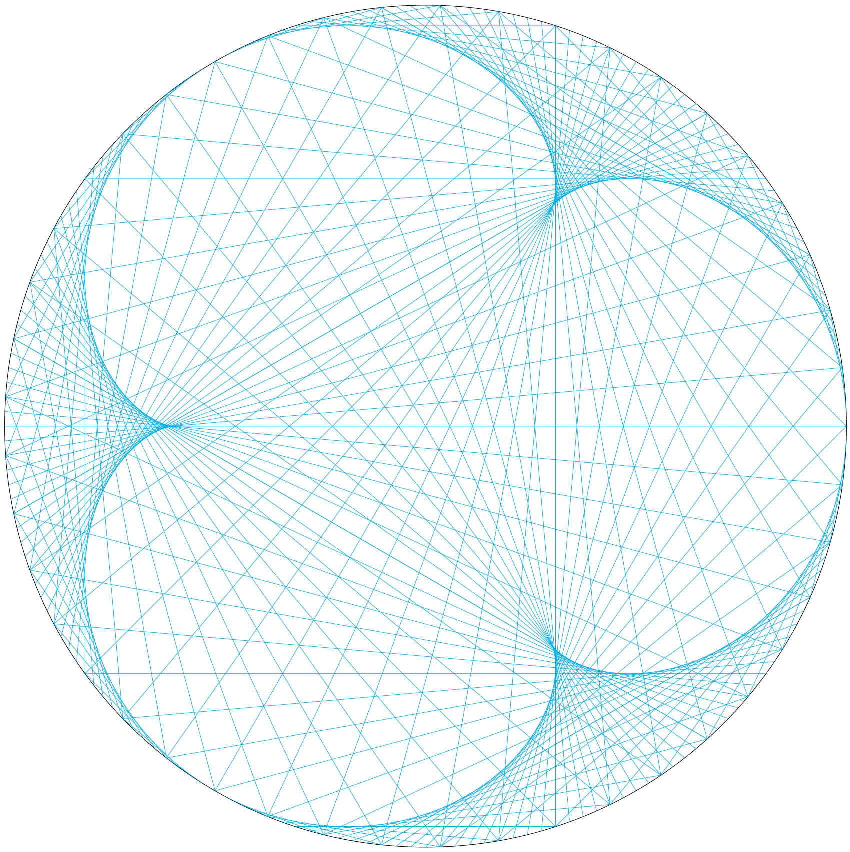
NKU Chern Class

Exams and Exercises



M.m Kay From Chern Class

2023 年 3 月 5 日

前言

这是作者整理并解答的一些省身班的试题.

凯淼淼

2023 年 3 月 5 日

目录

1 省身班考试题选

1.1 2020 级数学分析 3 期末考试

Problem 1. 求下列级数的收敛区间：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)}$.

解 1. 由 Striling 公式可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\mathrm{e}$，因此收敛半径 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，当 $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^n}{\mathrm{e}^n\cdot n!},$$

又注意到

$$\frac{\mathrm{e}^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{e}^n\cdot n!}{n^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1,$$

因此 $\left\{\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n\cdot n!}\right\}$ 单调递减且趋于 0，故由 Libiniz 判别法可知，此时级数收敛.

当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，进一步由 Striling 公式 $n!\sim\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$，而 $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故此时级数不收敛，也即综上所述，级数的收敛区间为 $\left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

2. 容易看见

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2},$$

从而可知级数的收敛半径为 1，又注意到当 $x=-1$ 时，结合 $n\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}\right)$ 单调递增且趋于正无穷，因此由 Libiniz 判别法可知此时级数收敛.

当 $x=1$ 时，注意到 $1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}<2\ln(n+1)$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\ln n}=\infty,$$

故可知级数的收敛区间为 $[-1,1)$. ♠

Problem 2. 求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开和对应的收敛区间:

1. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$;
2. $\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}$.

解 1. 我们注意到设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, 则归纳可得

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}},$$

因此我们由幂级数展开为

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}x^n,$$

这里约定 $(-1)!!=1$, 而我们由 Striling 公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}}=\frac{1}{2},$$

因此收敛半径为 2, 从而不难看见收敛区间为 $(-2,1)$.

2. 注意到 $\left(\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2(1+x^2)}{x^4+4}=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{1+x^4/4}$, 因此我们直接展开后者:

$$\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+x^4/4}=\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^4}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{4n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}x^{4n+2},$$

因此我们直接积分则可以得到

$$\arctan\frac{2x}{2-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)\cdot 4^n}x^{4n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(8n+6)\cdot 4^n}x^{4n+3},$$

由 $|x^4/4|<1$ 易知收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.(端点取不到是因为定义域, 无需代入验证) ♠

Problem 3. 根据 $\sin nx = n\int_0^x \cos nt\mathrm{d}t$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 的值.

解 对任意 $N\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin nx}{n}=\sum_{n=0}^{N}\int_0^x \cos nt\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{N}\cos nt\right)\mathrm{d}t,$$

而我们熟知

$$\sum_{n=0}^{N}\cos nt=\frac{\sin\frac{2N+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2},$$

因此我们有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{N}\cos nt\right)\mathrm{d}t=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\frac{2N+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

而不难注意到

$$\int_0^x\frac{\sin\frac{2N+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\left(\sin\frac{2N+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{\sin\frac{2N+1}{2}t}{t}\mathrm{d}t\to\frac{\pi}{2},$$

其中当 $N\to\infty$，分别运用了 Riemann 引理和一个熟知的积分，因此可知当 $x\neq k\pi$ 时，所求值为 $\dfrac{\pi-x}{2}$，而当 $x=k\pi$ 时，所求的值自然全部为 0. ♠

Problem 4. 计算下列积分：

$$I(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x.$$

解 我们先考虑 $a=\pm1$ 情形，注意到

$$\int_0^\pi \ln(2-2\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi \ln(2+2\cos(\pi-x))\mathrm{d}x=\int_0^\pi \ln(2+2\cos x)\mathrm{d}x,$$

又注意到 $\int_0^\pi \ln(2-2\cos x)\mathrm{d}x=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t$，而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t=I$，则 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln 2=I-\frac{\pi}{2}\ln 2$，从而 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$，因此不难知道 $I(\pm1)=0$.

下假设 $|a|<1$，因此注意到 $f(x,a)=\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 与 $f_a'(x,a)=\dfrac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$ 均在 $[0,\pi]\times(-1,1)$ 上连续，因此对含参变量积分求导有

$$I'(a)=\int_0^\pi \frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x,$$

其中当 $a=0$ 时 $I'(0)=0$，当 $a\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
I'(a)&=\frac{1}{a}\int_0^\pi\left(1-\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x\\
&\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\frac{1}{a}\left[\pi-\left(1-a^2\right)\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-2a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\right]\\
&=\frac{1}{a}\left[\pi-2\left(1-a^2\right)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2}\right]\\
&=\frac{1}{a}\left[\pi-\frac{1+a}{1-a}\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+\left(\dfrac{1+a}{1-a}t\right)^2}\right]\\
&=\frac{1}{a}\left[\pi-2\arctan\frac{1+a}{1-a}t\Big|_0^{+\infty}\right]=\frac{1}{a}\left[\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right]=0.
\end{aligned}$$

故结合 $I(0)=0$，我们有 $I(a)\equiv 0$，当 $|a|\le 1$ 时，而当 $|a|>1$ 时，注意到

$$I(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)\mathrm{d}x+\pi\ln a^2=\pi\ln a^2,$$

因此我们有

$$I(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\pi\ln\left(\max\{1,a^2\}\right).$$

♠

Problem 5. 求下列极限：
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}.$$

解 (方法一) 我们考虑函数 $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2h} & 0\le |x|\le 2h\\ 0 & 2h\le |x|\le \pi,\end{cases}$,其中 $h>0$,不难计算出其 Fourier 级数为
$$\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nh}{n^2\pi h}\cos nx=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^2 nh}{n^2\pi h}\cos nx,$$
因此我们可以有在 0 处级数收敛，故有
$$1=f(0)=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^2 nh}{n^2\pi h},$$
因此我们简单计算即可得到
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}=\frac{\pi h}{h}-\frac{h^2}{2},$$
进而不难知道原题极限为 $\frac{\pi}{2}$.

(方法二) 我们在第三题中已经知道 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ 当 $x\neq n\pi$ 时，因此我们对极限使用 L'Hosipital 法则 (逐项求导的验证细节略去)：
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}=\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nh}{n}=\lim_{h\to 0}\frac{\pi-2h}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

(方法三) ♠

Problem 6. 证明 Gamma 恒等式成立：

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

我们证明本题的一个推广形式：对任意 $s\in\mathbb{R}$，成立

$$\Gamma(s)=\frac{m^{s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\Gamma\left(\frac{s}{m}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{s+m-1}{m}\right).$$

证明 我们设 $g(s)=\dfrac{m^{s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\Gamma\left(\dfrac{s}{m}\right)\Gamma\left(\dfrac{s+1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\dfrac{s+m-1}{m}\right)$，从而

$$g(s+1)=\frac{m^{s+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\Gamma\left(\frac{s+1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{s+2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{s}{m}+1\right)=m\cdot\frac{s}{m}g(s)=sg(s),$$

又注意到利用余元公式，我们可计算得

$$\begin{aligned}
g(1)&=\frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\\
&=\frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\sqrt{\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)\Gamma\left(\frac{m-k}{m}\right)}\\
&=\frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\sqrt{\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\pi}{\sin\frac{k\pi}{m}}}=\sqrt{m}\Big/2^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{m}},
\end{aligned}$$

而我们熟知

$$\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{m}=\frac{m}{2^{m-1}},$$

这即表明 $g(1)=1$，又显然 $\ln g(s)$ 下凸，故由 Bohr-Mollerup 定理可知，$g(s)=\Gamma(s)$. ♣

1.2 2020 级数学分析 3 动态进出

Problem 1. (10 分)

设函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + n^q x^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 求 p, q 的取值范围，并说明理由.

解 p, q 满足的取值范围为 $p + q > 2$，一方面当 $p + q > 2$ 时，注意到任意 $x \in \mathbb{R}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{n^p + n^q x^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{2|x| \cdot n^{\frac{p+q}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{p+q}{2}}} < \infty,$$

因此由 Weierstrass 判别法可知函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

另一方面，当 $p + q \leq 2$，不妨假设 $p, q \geq 0$(因为若有一者小于 0，则取 $x = 1$，易见 $1/(n^p + n^q) \not\to 0$，从而不一致收敛). 为了否定不一致收敛，我们采用对角线判别法，即任意 n，存在 $p_n \geq 0$，$x_n \in \mathbb{R}$ 使得 $|u_n(x_n) + \cdots + u_{n+p_n}(x_n)| \not\to 0$，注意到取 $x_n = (2n)^{\frac{p-q}{2}}$，$p_n = n$，则

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n}{(n+k)^p + (n+k)^q x_n^2} \geq \frac{n x_n}{(2n)^p + (2n)^q x_n^2} = \frac{2^{\frac{p-q}{2}} \cdot n^{1+\frac{p-q}{2}}}{2^{p+1} \cdot n^p} > \varepsilon_0,$$

其中用到了 $1 + \frac{p-q}{2} \geq \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = p$，因此不一致收敛. ♠

Problem 2. (10 分)

已知 $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right), n = 1, 2, \cdots$ 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

收敛.

证明 由递推关系不难得到：$\{a_n\}$ 单调递减且收敛于 1，因此设 $b_n = a_n - a_{n+1}$，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$，则 b_n 为正项数列，且 S_n 收敛于 1，下证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2 - S_n}$$

收敛，又注意到 S_n 单调递增收敛到 1，从而 $S_n \le 1$，故 $2 - S_n \ge S_n$，故只需证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{S_n}$ 收敛即可 (事实上这便是熟知的 Sapagof 判别法，下面只是重复这一判别法的证明).

反证法，若不然，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，任意 N，存在 $N < n < m$ 使得

$$\frac{b_n}{S_n} + \cdots + \frac{b_m}{S_m} \ge \varepsilon_0,$$

而由 S_n 收敛，从而存在 n, m 使得 $\dfrac{S_m}{S_n} < 1 + \varepsilon_0$，容易看见这与上式矛盾，因此即证. ♣

Problem 3. (15 分)

对 p 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^p}$$

的收敛性，其中 $p>0$.

Problem 4. (15 分)

计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta},$$

其中 $0 \le b < a$.

解 设 $t=\dfrac{b}{a}\in[0,1)$，从而等价于计算含参变量积分

$$I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+t\sin\theta}{1-t\sin\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta},$$

设 $f(\theta,t)=\ln\left(\dfrac{1+t\sin\theta}{1-t\sin\theta}\right)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$，且补充定义 $f(0,t)=2t$，从而不难看见 $f(\theta,t)$ 以及 $f_t'(\theta,t)=\dfrac{2}{1-t^2\sin^2\theta}$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,1)$ 上连续，因此我们有

$$I'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-t^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-t\sin\theta}+\frac{1}{1+t\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta,$$

因此我们计算可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+t\sin\theta}\mathrm{d}\theta\overset{u=\tan\frac{\theta}{2}}{=}\int_0^1\frac{2\mathrm{d}u}{(u+t)^2+(1-t^2)}=\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\arctan\frac{u+t}{\sqrt{1-t^2}}\bigg|_0^1,$$

进而同理得到 $-t$ 的版本，换元相加即可得到

$$I'(t)=\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\arctan\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\arctan\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}},$$

从而结合 $I(0)=0$，可知 $I(t)=\pi\arcsin t$，故可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\pi\arcsin\frac{b}{a}.$$

♠

Problem 5. (10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 $a_0 = 1, a_1 = -7, a_2 = -1, a_3 = -43$ 并满足关系式

$$a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_2 a_n = 0 \quad (n \geq 0),$$

其中 c_1, c_2 为常数. 求 a_n 的一般表达式，级数的收敛半径以及级数和.

解 不难求出 $c_1 = -1$，$c_2 = -6$，因此设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，因此注意到

$$(1 - x - 6x^2)S(x) = 1 - 8x + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n)x^{n+2} = 1 - 8x,$$

从而直接计算可得

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1-8x}{(1-3x)(2x+1)} = -\frac{1}{1-3x} + \frac{1}{2x+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(3^n + (-2)^{n+1})x^n, \end{aligned}$$

因此我们可知 $a_n = -3^n + 2(-2)^{n+1}$，级数的收敛半径为 $\frac{1}{3}$，级数和为 $\frac{1-8x}{(1-3x)(2x+1)}$. ♠

Problem 6. (15 分)

设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数，满足 $f(-\pi)=f(\pi)$. 令

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-x)}\mathrm{d}x,$$

其中 $0\le r<1, \theta\in[-\pi,\pi)$. 证明: 对于任意的 $\theta_0\in[-\pi,\pi)$,

$$\lim_{r\to 1,\theta\to\theta_0} u(r,\theta)=f\left(\theta_0\right).$$

证明 我们先证明，$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}\mathrm{d}x=1$，事实上这可以借助 $x=\tan\frac{t}{2}$ 直接计算，但我们这里采取一种不显然但显然的证明，注意到

$$P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta},$$

因此逐项积分不难得到想要的结果. 我们将 $f(x)$ 定义域连续延拓至 $\mathbb{R}$，则

$$u(r,\theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}[f(\theta-x)-f(\theta_0)]\mathrm{d}x.$$

由 f 的连续性知 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $|x|<\delta, |\theta-\theta_0|<\delta$ 时，有 $|f(\theta-x)-f\left(\theta_0\right)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 将要估计的积分分为三部分，即

$$u(r,\theta)-f\left(\theta_0\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=I_1+I_2+I_3.$$

由于在 $(-\pi,-\delta)$ 上，$\cos x\leqslant\cos\delta$. 于是

$$1-2r\cos x+r^2\geqslant 1-2r\cos\delta+r^2=(1-r)^2+2r(1-\cos\delta)\geqslant 4r\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

又由 f 的连续性知 $\exists M>0$ ，使得 $|f(\theta-x)-f\left(\theta_0\right)|\leqslant M$. 于是

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\left(1-r^2\right)M}{4r\sin^2\frac{\delta}{2}}(\pi-\delta)\leqslant\frac{\left(1-r^2\right)M}{8r\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

从而 $\exists\delta_1$ ，使得当 $1-\delta_1<r<1$ 时，有 $|I_1|<\frac{\varepsilon}{4}$ ，同理可证，此时 $|I_3|<\frac{\varepsilon}{4}$. 最后估计 I_2 ，有

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是 $\exists\delta,\delta_1$ ，使得当 $1-\delta_1<r<1, |\theta-\theta_0|<\delta$ 时，有 $|u(r,\theta)-f\left(\theta_0\right)|<\varepsilon$. ♣

注：本题的背景实际上是 Possion 核是 Good Kernel，其中 Possion 核是指

$$P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

则本题即 $u(r,\theta)=(f*P_r)(\theta)$，那么借助 Good Kernel 的相关结论不难证明.

Problem 7. (15 分)

设 $\mathbb{R}^3$ 上连续函数 u 具有两阶连续偏导数，且不恒为常数. 满足

$$\Delta u + u^5 = 0, \text{其中} - \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

取 $\lambda > 0$ ，令 $u_\lambda(x,y,z) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ，其中 α 为正常数，使得

$$\Delta u_\lambda + u_\lambda^5 = 0.$$

1. 求 α;
2. 若 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 收敛, 证明对于任意 $\lambda > 0$,
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_\lambda(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$
3. D 是具有光滑边界 ∂D 的有界区域，且 $u|_{\partial D} = 0$ ，证明:
$$\iiint_D |u(x,y,z)|^6 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D |\nabla u(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 (1) 注意到 $\Delta u_\lambda(x,y,z) = \lambda^{\alpha+2}\Delta u(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, 从而我们有 $u_\lambda^5(x,y,z) = \lambda^{\alpha+2}u^5(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, 而 $u_\lambda^5(x,y,z) = \lambda^{5\alpha}u^5(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$，从而对比可知 $\lambda^{5\alpha} = \lambda^{\alpha+2}$，进而 $\lambda = \frac{1}{2}$.

(2) 注意到 $\nabla u_\lambda(x,y,z) = \lambda^{\alpha+1}\nabla u(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, 从而我们换元, 由 $\lambda > 0$, 设 $m = \lambda x$, $n = \lambda y$, $p = \lambda z$，则

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_\lambda(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \lambda^{2(\alpha+1)}\lambda^{-3} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(m,m,p)|^2 \mathrm{d}m\mathrm{d}n\mathrm{d}p, \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

其中用到了 $\alpha = \frac{1}{2}$ 以及 Jacobi 行列式为 λ^{-3}，即证.

(3) 可以对以下用 Gauss 公式

$$0 = \iint_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + u\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D |\nabla u|^2 + u \cdot \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

结合 $\Delta u + u^5 = 0$ 不难知道命题成立，即证. ♠

Problem 8. (10 分) 设

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2h} & 0\le |x|\le 2h\\ 0 & 2h\le |x|\le \pi,\end{cases}$$

其中 $h>0$. 利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数方法计算下列级数和:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2},\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 nh}{n^4}.$$

解 注意到 $f(x)$ 为偶函数，则其 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则我们有

$$a_0=\frac{2h}{\pi},\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1-\cos 2nh}{n^2\pi h},$$

因此 $f(x)$Fourier 级数为

$$\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nh}{n^2\pi h}\cos nx=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^2 nh}{n^2\pi h}\cos nx,$$

注意到 $f(x)$ 在 0 处连续，因此我们有

$$1=f(0)=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^2 nh}{n^2\pi h},$$

因此我们简单计算即可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}=\frac{\pi h}{h}-\frac{h^2}{2}.$$

我们注意到 Parseval 恒等式，则有

$$\frac{h^2}{2\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^4 nh}{n^4\pi^2h^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{4h}{3\pi},$$

因此我们直接计算可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 nh}{n^4}=\frac{4\pi h^3}{3}-\frac{h^4}{8}.$$

♠

1.3 2020 级复变函数动态进出

Problem 1. (7 分)

设 $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$. 存在常数 $M > 0$，满足当 $|z| \leq 1$ 时，有 $|p(z)| < M$. 证明：$p(z)$ 的零点都在 $|z| < M + 1$ 中.

证明 为了估计零点个数，一个自然的想法是用 *Rouché* 定理，为了得到 n 个零点，不难得到下面这个思路：

我们往证，任意 $|z| = M + 1$，我们成立

$$|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n| < |z|^n = (M+1)^n,$$

首先不难由 Cauchy 不等式，我们有任意 a_k，$1 \leq k \leq n$，

$$|a_k| = \frac{|p^{n-k}(0)|}{(n-k)!} \leq \max_{|z|=1} |p(z)| < M,$$

因此我们有

$$\frac{|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n|}{(M+1)^n} \leq M\left(\frac{1}{M+1} + \cdots + \frac{1}{(M+1)^n}\right) < \frac{M}{M+1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{M+1}} = 1,$$

故欲证不等式成立，从而由 Rouché 定理，即证 $p(z)$ 零点都在 $|z| < M + 1$ 中. ♣

Problem 2. (15 分)

假设函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<2$ 内解析. 当 z 在单位圆盘 $|z|<1$ 内时，证明:

1. $f(z)=\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, f(0)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\left(\mathrm{Re}\, f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right)\mathrm{d}t$;
2. $f(z)-f(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{2z}{e^{\mathrm{i}t}-z}\left(\mathrm{Re}\, f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right)\mathrm{d}t$.

假设 $f(z)$ 进一步满足在 $|z|=1$ 时，$\mathrm{Re}\, f(z)\geq 0$，证明：当 z 在单位圆盘 $|z|<1$ 内时有 $\mathrm{Re}\, f(z)\geq 0$.

证明 我们考虑先证 (2)，再证 (1)，注意到一方面由留数定理

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}\frac{2z}{w(w-z)}f(w)\mathrm{d}w=\mathrm{Res}[g,0]+\mathrm{Res}[g,z]=2f(z)-2f(0),$$

其中 g 为被积函数，另一方面，$\overline{f(w)}$ 连续，从而考虑积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}\frac{2z}{w(w-z)}\overline{f(w)}\mathrm{d}w,$$

由 f 解析，从而其可在 $|z|<2$ 内展开成 Taylor 级数

$$f(w)=a_0+a_1w+\cdots,$$

则在 $|w|=1$ 上，注意到 $1/w=\overline{w}$，则我们有

$$\overline{f(w)}=\overline{a_0}+\frac{\overline{a_1}}{w}+\cdots,$$

又注意到任意 $n\geq 1$，由留数定理

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}\frac{1}{w^n(w-z)}\mathrm{d}w=\frac{1}{z^n}+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}w^{n-1}}\frac{1}{w-z}\bigg|_{w=0}\right)=0,$$

进而可知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}\frac{2z}{w(w-z)}\overline{f(w)}\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|w|=1}\frac{2z\cdot\overline{a_n}}{w^n(w-z)}\mathrm{d}w=0,$$

从而我们即有

$$f(z)-f(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}\frac{2z}{w(w-z)}\mathrm{Re}(f(w))\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2z}{e^{\mathrm{i}t}-z}\left(\mathrm{Re}\, f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right)\mathrm{d}t,$$

即证第二问的等式，而对第一问，我们注意到由调和函数的平均值性质:

$$\mathrm{Re} f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t,$$

从而相加即可证明第一个式子.

进一步由第一个等式

$$f(z)=\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\left(\mathrm{Re}\,f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right)\mathrm{d}t,$$

我们等式左右同时取实部，注意到

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-\overline{z})}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}\right)=\frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}>0,$$

从而我们有

$$\mathrm{Re}(f(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\right)\left(\mathrm{Re}\,f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right)\mathrm{d}t\geq 0,$$

其中利用了题干中 $\mathrm{Re}\,f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\geq 0$ 的条件，综上我们完成了证明. ♣

Problem 3. (10 分)

设 $f(z)$ 在单位圆盘 $D:|z|<1$ 内解析. 设 $f(z)$ 在 D 中的零点为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$(一个 p 阶零点出现 p 次). 存在常数 $M>0$，满足对于任何 $|z|<1$，恒有 $|f(z)|\leq M$. 证明：函数 $f(z)$ 可以有更好的估计，即对于任何 $|z|<1$，恒有

$$|f(z)|\leq M\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|.$$

证明 我们考虑函数

$$g(z)=f(z)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\overline{z_k}z}{z-z_k}\right),$$

从而其为 D 上的全纯函数，则由最大模原理以及 Blascke 因子的性质可知 $|g(z)|\leq M$，即证. ♣

Problem 4. Suppose that f is holomorphic in an open set containing the closed unit disc, except for a pole of order m at z_0 on the unit circle. Show that if

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

denotes the power series expansion of f in the open unit disc, then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

证明 Since z_0 is a pole of order m, thus we have Laurent expansion:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + b_0 + b_1(z-z_0) + \cdots,$$

thus for arbitrary $|z| < |z_0| = 1$, we can expand $(z-z_0)^{-k}$ as

$$\frac{1}{(z-z_0)^k} = \frac{(-1)^k z_0^{-k}}{\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^k} = (-z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$

Thus we have $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ and we compare the coefficients of the two series:

$$a_n = b_n + z_0^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{m} (-z_0)^{-k} \binom{n+k-1}{k-1},$$

so we can write that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n + z_0^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{m} (-z_0)^{-k} \binom{n+k-1}{k-1}}{b_{n+1} + z_0^{-n-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} (-z_0)^{-k} \binom{n+k}{k-1}}$$

$$= z_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{b_n z_0^n \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} + \sum_{k=1}^{m} (-z_0)^{-k} \binom{n+k-1}{k-1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1}}{b_{n+1} z_0^{n+1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} + \sum_{k=1}^{m} (-z_0)^{-k} \binom{n+k}{k-1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1}}.$$

On the one hand, $f(0) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ converges, thus $b_n z_0^n \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} \to 0$, $b_{n+1} z_0^{n+1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} \to 0$, and for arbitrary $1 \le k \le m-1$, we have

$$\binom{n+k-1}{k-1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{(n+k-1)!}{(n+m-1)!} = O(n^{k-m}) \to 0.$$

Similarly we have $\binom{n+k}{k-1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} \to 0$. However, on the other hand, we have $\binom{n+m}{m-1} \Big/ \binom{n+m-1}{m-1} \to 1$, thus we have $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$. ♣

Problem 5. (8 分)

设 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处解析，0 为 $f(z)$ 的 $n(>0)$ 阶极点. 设 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上为实数. 求出满足上述条件的所有的函数 $f(z)$，写出 $f(z)$ 的具体表达式.

解 设 $f(z)$ 在 $0<|z|<r$ 上有 Laurent 展开，其中 $r>1$，

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

则我们构造定义在 $\frac{1}{r}<|z|<r$ 上的函数

$$g(z)=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\overline{a_k}}{z^k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{-k}-\overline{a_k}}{z^k}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\overline{a_{-k}}\right)z^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k,$$

其中容易看见当 $|z|=1$ 时，$g(z)=f(z)-\overline{f}\left(\frac{1}{z}\right)=f(z)-\overline{f(z)}$，这里 $\overline{f}(z)$ 表示在 Laurent 展开的系数中取共轭，最后一个等式用到了 $|z|=1$ 时，$1/z=\overline{z}$.

又由 $|z|=1$ 时，$f(z)$ 为实数，因此 $g(z)=0$，又不难知道 $g(z)$ 是 $\frac{1}{r}<|z|<r$ 的全纯函数，因此 $g(z)\equiv 0$，故 $a_k=0$，任意 $k\geq n+1$，且 $a_k=\overline{a_{-k}}$，任意 $0\leq k\leq n$，另一方面不难验证，全体形如

$$f(z)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_kz^k+\frac{\overline{a_k}}{z^k}\right),\quad a_0\in\mathbb{R},a_k\in\mathbb{C},$$

的函数符合题意，因此这即为全体满足条件的函数. ♠

解 (另解) 由 Laurent 展开，我们有任意 $k\in\mathbb{Z}$，

$$a_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{k+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}\mathrm{d}\theta,$$

从而我们结合任意 θ，$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 为实数，从而

$$\overline{c_{-k}}=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}\mathrm{d}\theta=c_k,$$

进而我们完成了与解法 1 一样的证明. ♠

1.4　2020 级抽象代数 1 动态进出

Problem 1. (10 分)
设 H 和 K 均为群 G 的正规子群，证明：

1. HK 是 G 的正规子群，且 HK/H 是 G/H 的正规子群；

2. 商群 G/HK 与商群 $(G/H)/(HK/H)$ 同构.

证明 (1) 注意到任意 $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$, 有 $h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1}h_2^{-1}k_2k_1^{-1})k_1k_2^{-1} \in HK$, 从而 $HK < G$，进一步任意 $g \in G, h \in H, k \in K$，有 $ghkg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in HK$，从而 $HK \lhd G$. 又显然 $H \lhd HK$，从而 HK 是包含 H 的 G 中正规子群，因此 HK/H 是 G/H 的正规子群.

(2) 此即第三同构基本定理. ♣

Problem 2. (本题 10 分) 设 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. 已知 $\alpha = a + b\sqrt{-3} \in R$ ，且 $a^2 + 3b^2$ 是素数，证明 α 是 R 中的素元素. 试问 R 是唯一分解整环吗? 为什么?

证明 我们考虑去证明 $R/(\alpha) \cong \mathbb{Z}_{a^2+3b^2}$，这里 (α) 指 α 生成的主理想. 注意到 $a^2 + 3b^2$ 为素数，从而 $(a, b) = 1$，因此存在 $k, l \in \mathbb{Z}$ 使得 $kb + la = 1$，故有 $(a + b\sqrt{-3})(k + l\sqrt{-3}) = (ak - 3bl) + (kb + la)\sqrt{-3} = n + \sqrt{-3}$，其中 $n = ak - 3bl \in \mathbb{Z}$，因此同时取代表元，$\overline{\sqrt{-3}} = \overline{-n}$，从而对任意 $x + y\sqrt{-3} \in R$，对 $x - yn$ 关于 $a^2 + 3b^2$ 作带余除法，即 $x - ny = d(a^2 + 3b^2) + r$，其中 $0 \leq r < a^2 + 3b^2$，进而可知 $\overline{x - ny} = \overline{r}$，因此我们考虑 $\varphi : R/(\alpha) \to \mathbb{Z}_{a^2+3b^2}$，$\varphi(\overline{x + y\sqrt{-3}}) = r$，由上面的论断可知这是良定义的，且显然是双射，保持运算也是不难验证的，因此 φ 是同构，又 $a^2 + 3b^2 = p$ 为素数，从而 $\mathbb{Z}_p$ 是域，进而 (α) 是素理想，从而 α 是素元.

R 不是唯一分解整环，因为注意到 $4 = 2 \times 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$. ♣

Problem 3. (15 分)
设 G 为有限群，φ 为群 G 的自同构，令 $I = \{g \in G | \varphi(g) = g^{-1}\}$，若 $|I| > \frac{3}{4}G$，证明：G 为 Abel 群.

证明 证明交换群的常见手法包括考虑交换化子或者证明群的中心为原来的群，我们这里就考虑后者的思路，因为条件暗示我们对集合大小进行估计.

首先一个基本的观察是，若 $a, b \in I$，且 $ab \in I$，那么 $b^{-1}a^{-1} = \varphi(ab) = a^{-1}b^{-1}$，这即意味着 $ab = ba$，因此可换，从而我们的一个自然思路是，任取 $a \in G$，有哪些 $b \in I$ 满足 $ab \in I$ 呢?

翻译过来即是 $b \in I \cap a^{-1}I$，因此我们自然想到去估计这个集合的元素个数，显然

$$|I \cap a^{-1}I| \geq |G| - |G - I| - |G - a^{-1}I| = 2|I| - |G| > \frac{|G|}{2},$$

这里用到了 $|I| = |a^{-1}I|$，进一步我们考虑 a 的中心元素 $C_G(a)$，则显然 $I \cap a^{-1}I \subseteq C_G(a)$，因此 $|C_G(a)| > |G|/2$，而 $C_G(a)$ 为群，从而由 Lagrange 定理，$C_G(a) = G$. 这即表明 $I \subseteq C(G)$，从而 $|C(G)| \geq |I| > \dfrac{3}{4}|G|$，进而表明 $C(G) = G$，即 G 是 Abel 群. ♣

Problem 4. (本题 15 分) 一个么环 R 称为对合环，如何对任何 R 中的可逆元 a ，都有 $a^2 = 1$ ，其中 1 为 R 的单位元. 试证明: $\mathbb{Z}_m, m > 1$，为对合环当且仅当 $m = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$.

1.5 2020 级常微分方程动态进出

Problem 1. 证明初值问题: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 没有连续的解 (甚至没有连续的局部解)，其中

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当} 1 \leq |x+y| < +\infty; \\ (-1)^n, & \text{当} \dfrac{1}{n+1} \leq |x+y| < \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots); \\ 0, & \text{当} |x+y| = 0. \end{cases}$$

Problem 2. 1. 考虑微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y}), \tag{1.1}$$

其中 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵，其全部特征值的实部均小于一个实常数 α；$\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})$ 在 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 连续，且满足 $|\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})| \leq h(t)|\boldsymbol{y}|$，这里 $h(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数。证明：存在正常数 K 使得 (1) 的任一解 $\boldsymbol{y}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上均满足

$$|\boldsymbol{y}(t)| \leq K|\boldsymbol{y}(0)|\mathrm{e}^{\alpha t + KH(t)},$$

其中 $H(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$.

2. 考虑线性微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = (A + B(t))\boldsymbol{y} \tag{1.2}$$

其中 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵，其全部特征值的实部均小于 0； $B(t)$ 是一个定义在 $[0, +\infty)$ 的 $n \times n$ 连续实值矩阵函数，且满足

$$\int_0^{+\infty} |B(t)| dt < +\infty.$$

请判断 (2) 零解的稳定性.

1.6 2021 级数学分析 3 动态进出

Problem 1. (15 分) 设 $0 < p < 1$，$a_1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n^p}$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Problem 2. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数，且对任意 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

证明：$f(x)$ 在所有连续点处为 0.

Problem 3. (15 分) 设

$$a_n = \int_0^n \mathrm{e}^{t^\alpha n^{-\beta}}\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha > \beta \geq 0$，根据不同的 α，β，讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径.

Problem 4. (15 分) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n^2}$ 的值.

Problem 5. (20 分) 证明 Gauss 乘积公式：

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-ns}\Gamma(ns).$$

Problem 6. (20 分) 设 $u(x,y)$ 是平面区域 D 上二阶连续可微的函数，证明：

$$\Delta u \geq 0, \quad \forall (x,y) \in D$$

当且仅当对任意 $(x_0,y_0) \in D$，$0 \leq r < d(x_0,y_0)$ 成立

$$u(x_0,y_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中 $d(x_0,y_0)$ 表示 (x_0,y_0) 到 D 的距离.

1.7 2021 级省身班常微分方程动态进出

Problem 1. (25 分)

1.8　2021 级数学分析 3 期末考试

Problem 1. 计算曲线积分

$$\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z,$$

其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+z=1$ 的交线，方向从 $(1,0.0)$ 经过 $x>0$，$y>0$ 到 $(0,0,1)$，再从另一个方向返回.

Problem 2. 讨论级数的敛散性：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\frac{1}{n^\beta}$，其中 $\alpha>0$，$\beta>0$；
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!\sin\frac{\alpha}{1}\cdots\sin\frac{\alpha}{n}$，其中 $\alpha>0$.

Problem 3. 讨论反常积分

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{x^p+1}\cos x\mathrm{d}x$$

的绝对收敛和条件收敛性，其中 $p>0$.

Problem 4. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上连续的奇函数, 证明: 存在各项为奇次项的多项式序列在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

Problem 5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的连续可微函数，设 a_n，b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|<\infty.$$

Problem 6. 对 a 求导，其中 $a>1$，计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x.$$

2 省身班教材题选

2.1 数学分析

Problem 1. (Tauber 定理) 内容...

2.2 复变函数

Problem 1. 设 $A=\{z|0<r\le|z|\le R\}$，证明存在 $a>0$ 使得对任意整函数 f，

$$\max_{z\in A}\left|f(z)-\frac{1}{z}\right|\ge a.$$

证明 设 $g(z)=zf(z)-1$，从而 $g(0)=-1$，因此由 Cauchy 积分公式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g(z)}{z}\mathrm{d}z=g(0)=-1,$$

其中 $\gamma=\{z||z|=r'\in(r,R)\}$，从而可知

$$\max_{z\in\gamma}\left|f(z)-\frac{1}{z}\right|=\max_{z\in\gamma}\left|\frac{g(z)}{z}\right|\ge\frac{1}{r'},$$

故可知存在 $a=\dfrac{1}{R}$ 符合要求，即证. ♣

Problem 2. 设 f 在 $|z|<1$ 中解析，且 $|f(z)|\le\dfrac{c}{1-|z|}$，证明：$|f'(z)|\le\dfrac{4c}{(1-|z|)^2}$.

证明 技巧在于使用 *Cauchy* 不等式时半径的选取.

任取 $|z|<1$，我们由 Cauchy 不等式，对任意 $R<1-|z|$，我们均成立

$$|f'(z)|\le\frac{M_R}{R},\quad M_R=\max_{|w-z|=R}|f(w)|,$$

又注意到 $|f(w)|\le\dfrac{c}{1-|w|}$，而 $|w|\le R+|z|$，进而我们有估计

$$|f'(z)|\le\frac{c}{R(1-R-|z|)}\le\frac{4c}{(1-|z|)^2},$$

这里 R 取 $\dfrac{1-|z|}{2}$ 恰能使得右端最大，即证. ♣

Problem 3. 设 $n\ge1$，$a_0\ne0$，$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$.

1. 证明：$\max\limits_{|z|\le1}|P(z)|=\max\limits_{|z|\le1}|a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n|$；
2. 证明：$\max\limits_{|z|\le1}|P(z)|\ge|a_0|$；
3. 若当 $|z|\le1$ 时，$|P(z)|\le M$，证明：当 $R>1$ 时，$\max\limits_{|z|=R}|P(z)|\le MR^n$；
4. 若当 $|z|\le1$ 时，$|P(z)|\le M$，证明：当 $|z|\le1$ 时，$|P'(z)|\le enM$.

证明 (1) 设 $Q(z) = z^n P(z^{-1}) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$，则由最大模原理

$$\max_{|z|\le 1} |Q(z)| = \max_{|z|=1} |z^n P(z^{-1})| = \max_{|z|=1} |P(z)| = \max_{|z|\le 1} |P(z)|,$$

即证第一小问.

(2) 注意到 $\max\limits_{|z|\le 1} |Q(z)| \ge |Q(0)| = |a_0|$，即知成立.

(3) 注意到 $\max\limits_{|z|=R} |P(z)| = R^n \cdot \max\limits_{|z|=1/R} |Q(z)| \le R^n \max\limits_{|z|=1} |Q(z)| \le MR^n$，即证.

(4) 技巧仍然在于适当选取 *Cauchy* 不等式的半径.

首先任意 $|z| \le 1$，选取半径 r，则我们有

$$|P'(z)| \le \frac{M_r}{r}, \quad M_r = \max_{|w-z|=r} |P(w)|,$$

进一步我们估计 M_r，显然 $\{|w-z| = r\} \subseteq D_{1+r}$，且由第三问可知

$$M_r \le \max_{|z|=1+r} |P(z)| \le M(1+r)^n,$$

因此我们成立估计对任意 $r > 0$，

$$|P'(z)| \le M \cdot \frac{(1+r)^n}{r} < \mathrm{e} n M,$$

我们这里取 $r = \dfrac{1}{n}$ 即可证明原题所需的估计. ♣

Problem 4. 求在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| \equiv 1$ 的整函数 f 的全体.

证明 我们由最大模和最小模原理可知 $f(z)$ 为常数或有零点，若为前者，则 $f(z) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$，$\lambda \in \mathbb{R}$，若有零点，则一定为有限多个，不妨设为 $z_1, \cdots, z_n$，因此我们熟知当 $|z| \le 1$ 时

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right),$$

又若存在 $z_k \ne 0$，则 $f(z)$ 在 $\dfrac{1}{\overline{z_k}}$ 处不解析，与整函数矛盾，因此零点全为 0，故可知 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} z^n$，综上，全体 f 为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} z^n$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$，$n \ge 0$. ♣

Problem 5. 证明：$z + z^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 在上半平面 $\mathrm{Im} z > 0$ 中仅有一个零点.

证明 技巧在于，我们选取 $f(z) = z^2 + a$，$g(z) = z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - a$，其中 $a > 1$，则我们考虑围道 $\{z | -R \le z \le R\} \cup \{z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$，其中 R 为任意大于 $2\sqrt{a} > 2$ 的常数. 下面我们证明，在这个围道上恒有 $|g(z)| < |f(z)|$. 一方面在半圆上，我们注意到

$$|g(z)| \le R + R^{-b \sin\theta} + a \le 2R + a < R^2 + a < |f(z)|,$$

此时成立，另一方面在实轴上时，$|g(z)| = \sqrt{(x+\cos x - a)^2 + \sin^2 x}$，则其小于 $|f(z)| = x^2 + a$ 等价于 $x^4 + (2a-1)x^2 + 2ax + 2a\cos x - 1 > 0$，由 $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ 不难验证知成立. 因此由 Rouché 定理，$f(z)$ 仅有一根 $a\mathrm{i}$，故可知命题得证. ♣

Problem 6. 证明：对任意 $M > 0$，存在 N，使得任意 $n > N$，多项式

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

在 $|z| \leq M$ 中没有任何零点.

证明 反证法，若不然则存在 M 使得存在递增得正整数列 $\{n_k\}$ 使得 $P_{n_k}(z)$ 在 $|z| \leq M$ 中总有零点，不妨设为 $P_{n_k}(z_k) = 0$，则我们有 $\{z_k\}$ 有收敛点列，不妨设其收敛为 z_0，因此由任意 $n \in \mathbb{N}$，$|z| \leq M$，我们有

$$|P_n(z)| \leq 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} \leq \mathrm{e}^M,$$

因此 $\{P_{n_k}(z)\}$ 在 $|z| \leq M$ 上一致有界，进而等度连续，故任意 $\varepsilon > 0$，存在 K，任意 $k > K$，有

$$|P_{n_k}(z_0)| = |P_{n_k}(z_0) - P_{n_k}(z_k)| < \varepsilon,$$

而 $\{P_{n_k}(z)\}$ 一致收敛 e^z，从而上式表明 $|\mathrm{e}^{z_0}| < \varepsilon$ 进而 e^{z_0}，这与 e^z 没有零点矛盾！ ♣

2.3 一些杂题

Application of Picard little theorem

Problem 1. If f, g, h are entire function, and $e^f + e^g = h$, show that

1. if $h \equiv 1$, then f and g are constants;
2. h can not have 2023 zeros.

Problem 2. Let f and g are two holomorphic function defined on the entire complex plane $\mathbb{C}$, such that for all $z \in \mathbb{C}$, we have

$$f(z)^{2020} + g(z)^{2020} = 1,$$

Prove that f and g are constants.

(From *2020 Yau Contest Porblem 4*)

Hint: this problem is much harder than problem 1, although they look similar.

Problem 3. Let f is holomorphic on the entire complex plane $\mathbb{C}$, then $f \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ has a fixed point unless f is a translation $z \mapsto z + b$, $b \neq 0$.

Problem 4. Let $U \subset \mathbb{C}$ be a non-empty open set and $f : U \to U$ be a non-constant holomorphic function. Prove that, if $f \circ f = f$, then $f(z) \equiv z$ for all $z \in U$.

(From *2022 Yau Contest Porblem 2*)

Hint: this problem may not need Picard little theorem.

2.4 常微分方程