凯淼淼的数学学习笔记 (二)

数学分析狂想曲

作者：M.m Kay

我贴着地面步行，不在云端跳舞.

目录

1 数列极限 1

1.1 嵌套根号型极限问题 1

1.1.1 (类型 1) 可以写出递推关系型的嵌套根号 1

1.1.2 从 (类型 1) 联想到的一个类似问题 1

1.1.3 (类型 2) 利用不等式放缩结合夹逼定理 1

1.1.4 (类型 2) 第二个例子的一般结论：Polya 收敛准则，Herschfeld 收敛准则与 Polya-Szego 不等式以及进一步的估计问题 2

1.1.5 (类型 3) 利用 Ramanujan 的思想构造根号 3

1.2 上下极限的应用 3

1.2.1 数列中的上下极限 3

1.2.2 上下极限的 Stolz 定理与 L'Hospital 法则 7

1.3 难题选解 8

1.4 数列极限竞赛题摘 10

2 实数理论与一元微分学 15

2.1 稠密性 15

2.2 完备覆盖理论与函数连续 16

2.3 单侧导数相关理论 17

2.4 微分算子 D 与复数的引入 19

2.5 函数微分学难题选解 21

第 2 章 练习 24

3 定积分 26

3.1 换元积分法探究 26

3.2 难题选解 29

3.3 关于积分变限函数的凹凸性问题举隅 30

3.4 原函数存在性理论 31

3.4.1 不具有原函数的讨论 31

3.4.1.1 函数无介值性 31

3.4.1.2 Drboux 函数的性质 31

3.4.2 具有原函数的充分条件 32

3.4.2.1 连续函数必有原函数 32

3.4.2.2 $f(x)g(x)$ 型函数原函数存在性的相关结论 33

3.5 定积分判断题思路整理 33

3.6 定积分竞赛题摘 35

4 点集拓扑基础 45

4.1 区分基本概念 45

4.2 距离函数的一个应用例子——第十章补充资料思考题 46

4.3 难题选解 47

4.4 点集拓扑基础判断题思路整理 48

4.5 难题选解 (II) 51

5 多元函数的极限，连续与微分 **53**
5.1 半连续函数 53
5.2 二元函数可变量代换为一元函数问题 55
5.3 微分同胚 57
5.4 函数相关性 60
5.5 难题选解 61

6 流形上的微分学 **67**
6.1 $\mathbb{R}^n$ 中的流形 67

7 数项级数 **68**
7.1 Du Bois-Reymond 判别法和 Dedekind 判别法 68
7.2 Hardy 不等式 69
7.3 Riemann 重排定理及应用 71
7.4 级数的乘法 74
7.5 Euler-Maclaurin 公式 76
7.6 难题选解 78

8 广义积分 **81**
8.1 构造积分证明不等式 81
8.2 广义积分的计算 83
8.3 广义积分敛散性的判定 87
8.4 难题选解 88

9 函数项级数与幂级数 **89**
9.1 准一致收敛与控制收敛定理 89
9.2 难题选解 91

10 重积分 **92**
10.1 Jordan 测度 92
10.1.1 Jordan 测度的性质 93
10.1.2 多元函数可积理论 95
10.2 转化为重积分的奇思妙想 97
10.3 重积分与偏导数 104
10.4 难题选解 106
10.5 n 重积分的极限问题 114
第 10 章 练习 116

11 曲线积分与曲面积分 **117**
11.1 第一型曲线积分 117
11.2 第二型曲线积分 117
11.3 Green 公式 119
11.4 曲线积分难题选解 121

12 Combinatorics Introduction by Prof. M.J **122**
12.1 Inclusion and Enclusion Princinple 122
12.2 Double Counting 124

13 普特南、IMC 及国际竞赛题选解 125

13.1 一元微积分 125

13.2 多元微积分 126

13.3 级数理论 127

13.4 高等代数 128

14 竞赛模拟试题 129

14.1 第一套 (测试范围：数学分析 I) 129

14.2 第二套 (测试范围：点集拓扑，多元函数) 130

14.3 第三套 (CMC 初赛模拟题 1) 131

14.4 第四套 (CMC 初赛模拟题 2) 132

14.5 第五套 (单元训练题——多元函数，矩阵相似) 133

14.6 第六套 (单元训练题——重积分) 134

14.7 第七套 (CMC 模拟题 3) 135

14.8 第八套 (数学分析 II 模拟期末) 136

第 1 章 数列极限

1.1 嵌套根号型极限问题

1.1.1 (类型 1) 可以写出递推关系型的嵌套根号

比如以下四个例子

命题 1.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}}=\frac{\pi}{2},a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{n}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2},a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n-1}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}}}}=1,a_n=\sqrt{\frac{1}{n}+a_{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_1\sqrt{7+\varepsilon_2\sqrt{7+\cdots+\varepsilon_n\sqrt{7}}}=2(\varepsilon_{2k-1}=1,\varepsilon_{2k}=-1),a_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}$$

笔记 容易发现，如果嵌套式子是可以视为从最外层嵌套的话就很容易写出递推关系式，进而求极限，这是最简单的类型. 而联想第 1 个和第 4 个式子，笔者联想到另一个问题，作为补充 (并不一定与类型一本质相关)

1.1.2 从 (类型 1) 联想到的一个类似问题

命题 1.2

定义数列

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^k}$$

其中 $\varepsilon_k\in\{-1,1\}\,(0\le k\le n)$，则有

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}c_n\right)=\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n}}}$$

证明及上述资料可参考美国数学月刊的论文.

1.1.3 (类型 2) 利用不等式放缩结合夹逼定理

这种方法往往只能求出少数极限，大多数情况只能够证明这样形式下去的极限存在，比如是下面两个经典例子

命题 1.3

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\cdots+\sqrt[n]{n^p}}}=1$$

其中 p 为任意给定正整数.

这个放缩相当宽松. 但下面这个例子只能放缩出一个上界从而证明收敛：(下面这个式子证明可以移项平方后采用数学归纳法，移项后就消解了不能归纳的问题，这个比较有趣的想法来自蔡晨涛)

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}<2$$

证明其收敛可参阅知乎回答.

1.1.4 (类型 2) 第二个例子的一般结论：Polya 收敛准则，Herschfeld 收敛准则与 Polya-Szego 不等式以及进一步的估计问题

定理 1.1 (Polya 收敛准则)

对于 $a_n>0$，记

$$s_n=\sqrt[r]{a_1+\sqrt[r]{a_2+\cdots+\sqrt[r]{a_n}}}$$

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\ln(a_n)}{n}=a$，则当 $a<\ln r$ 时 $\{s_n\}$ 收敛，大于时发散，等于时法则失效.

证明可参考知乎文章.

定理 1.2 (Herschfeld 收敛准则)

对于 $a_n>0$，记

$$t_n=\sqrt[m_1]{a_1+\sqrt[m_2]{a_2+\cdots+\sqrt[m_n]{a_n}}}$$

则上数列收敛的充要条件为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^{m_1m_2\cdots m_n}<+\infty$

证明可参考知乎文章.

笔记 关于上述两个判别法更进一步的理论可参阅文献.

定理 1.3 (Polya-Szego 不等式)

分别记

$$u_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}$$

$$U_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n+r_n}}}(r_n\geq 0)$$

则有下面不等式成立：

$$U_n-u_n\leq\frac{r_n}{2^n\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n-1}}\cdots\sqrt{a_1}}$$

笔记 关于这个结论及其他更进一步的理论可参阅文献.

命题 1.4 (进一步的估计问题)

在类型 2 中已经可以得到数列收敛，那么记极限值为 τ，那么有结论：$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\tau-a_n}=\frac{\sqrt{e}}{2}$

证明可参考知乎回答.

1.1.5 (类型 3) 利用 Ramanujan 的思想构造根号

先通过一个例子来感受

命题 1.5

设 $x>0$，定义

$$a_n=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-2)\sqrt{1+(x+n-1)}}}}}$$

则证明 $\lim_{n\to\infty}a_n=1+x$.

证明 注意到 $(x+n)^2-1=(x+n-1)(x+n+1)(n\in\mathbb{N})$，从而：

$$\begin{aligned}
1+x&=\sqrt{1+2x+x^2}=\sqrt{1+x\sqrt{1+((x+2)^2-1)}}\\
&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+((x+3)^2-1)}}}\\
&=\cdots\\
&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-2)\sqrt{1+\left((x+n)^2-1\right)}}}}}\\
&=\cdots
\end{aligned}$$

从而无穷写下去可知 $\lim_{n\to\infty}a_n=1+x$，即所求.

下面可以模仿这个题解决下面这个极限

命题 1.6

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\sqrt{4^2+\cdots+\sqrt{4^{n-1}+\sqrt{4^n}}}}=3$$

证明可参考知乎回答.

1.2 上下极限的应用

1.2.1 数列中的上下极限

定理 1.4 (数列上下极限中的用法总结)

在数列问题中，运用上下极限的第一步是 (归纳法或瞪眼法) 得出数列有界，进而可以将上下极限设出来，带回原来递推关系式中进行比较分析，在含上下极限的问题中，进行合适的放缩估计是核心！

下面是第一类问题，利用上下极限可以处理不等式递推关系的数列.

命题 1.7 (利用上极限夹逼放缩)

设 $p_1, p_2, \cdots, p_k > 0$，且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$，非负数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+k+1} \le a_{n+1}^{p_1} a_{n+2}^{p_2} \cdots a_{n+k}^{p_k} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 由加权均值不等式，我们有

$$a_{n+k+1} \le a_{n+1}^{p_1} a_{n+2}^{p_2} \cdots a_{n+k}^{p_k} \le p_1 a_{n+1} + \cdots + p_k a_{n+k},$$

从而容易证明数列有界，故设其上极限为 $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$，进而对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得任意 $n > N$ 均有 $a_n < L + \varepsilon$，从而我们断言有

$$a_n > L - \frac{2(1-p_k)}{p_k}\varepsilon, \quad \forall n \ge N+1,$$

若不然，假设存在 $m > N+1$ 使得 $a_m < L - \dfrac{2(1-p_k)}{p_k}\varepsilon$，则可知

$$a_{m+1} \le \sum_{i=1}^{k} p_i a_{m+k-i} \le p_k\left(L - \frac{2(1-p_k)}{p_k}\varepsilon\right) + (1-p_k)(L+\varepsilon) = L - (1-p_k)\varepsilon,$$

进而我们可知，对任意 $n' > m$，我们归纳下去恒有 $a_{n'} < L - (1-p_k)\varepsilon$，这与上极限为 L 矛盾！从而断言成立，进而由 ε 的任意性我们有 $\{a_n\}$ 收敛于 L，综上即证.

笔记 本题的方法非常精妙，关键在于发现了那个左侧估计的断言，使得问题变得行云流水，酣畅淋漓.

命题 1.8

设数列 $\{x_n\}$ 满足条件：对任何 $m, n \in \mathbb{N}^*$，都有

$$0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n, \quad 或 \quad 0 \le x_{m+n} \le x_m \cdot x_n,$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ 存在.

笔记 非常经典的问题，这两个问题本质上是一样的，处理方法也体现了极限过程中的一个分次极限的思想，一般是考虑固定 $m \in \mathbb{N}^*$，对任意正整数 n 对 m 作带余除法，即 $n = q_n \cdot m + r_n$，从而结合 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n}{n} = \dfrac{1}{m}$ 于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{n} = 0$，得到 x_n 与 x_m 和 x_1 的估计式，从而先对 n 取极限即可.

下面是第二类问题，利用上下极限可以处理多数列通项交错问题，关键在于反复代入递推得到若干方程，从而借助方程即可得到上下极限的具体值，这种方法也可以用来处理数列的子列极限证相等.

命题 1.9

证明：给定正项数列 $\{x_n\}$，则数列 $\{y_n\}$ 收敛的充分必要条件为 $\{z_n\}$ 收敛，其中

$$y_n = \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n-1} + \cdots + \sqrt{x_1}}}, \quad z_n = \cfrac{1}{x_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_1 + 1}}}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

证明 我们证明一个更强的结论，即 $\{x_n\}$ 收敛等价于 $\{y_n\}$ 收敛等价于 $\{z_n\}$ 收敛，注意到若 $\{y_n\}$ 或 $\{z_n\}$ 收敛，则显然有 $\{x_n\}$ 收敛，下只需证明若 $\{x_n\}$ 收敛则 $\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 收敛.

不妨设 $\{x_n\}$ 收敛于 $A \ge 0$，从而可知 x_n 有上界 $M > 1$，则可知

$$y_n = \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n-1} + \cdots + \sqrt{x_1}}} \le \sqrt{M + \sqrt{M + \cdots + \sqrt{M}}} \le M\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}M,$$

故 y_n 有上界，存在上下极限 $L = \varlimsup y_n$，$l = \varliminf y_n$，从而由 $y_n = \sqrt{x_n + y_{n-1}}$，有 $L^2 = A + L$，$l^2 = A + l$，又注意到 $l > \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x_1} = 1$，从而可解得 $L = l = \dfrac{1+\sqrt{1+4A}}{2}$，即 y_n 收敛. 同理可知 z_n 收敛，综上即证.

笔记 核心就在于先论证有界，再去处理上下极限的关系.

命题 1.10 (CMC 决赛试题)

设 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n<+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}=1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\Big/n\right)=1$.

证明 设 $b_n=\ln a_n$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n<+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\Big/n\right)=0$，从而易见

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{b_k}\Big/n\right)\geq\varliminf_{n\to\infty}\exp\left(\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right)=1,$$

从而下面估计其上极限，对任意 $\varepsilon>0$，定义 $K_n(\varepsilon)=\#\{b_k|b_k\geq\varepsilon,1\leq k\leq n\}$，则由

$$0=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big/n\right)\geq\lim_{n\to\infty}\varepsilon\cdot\frac{K_n(\varepsilon)}{n}>0,$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{K_n(\varepsilon)}{n}=0$，则又由 a_n 有界可知 e^{b_n} 有上界 M，从而我们成立估计

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{b_k}\Big/n\right)\leq\varlimsup_{n\to\infty}\frac{(n-K_n(\varepsilon))\cdot\mathrm{e}^{\varepsilon}+M\cdot K_n(\varepsilon)}{n}=\mathrm{e}^{\varepsilon},$$

由 ε 的任意性可知上极限不超过 1，从而可知极限存在且为 1，即证.

笔记 本题也反映出了一个比较好的思想，进行分段估计，本质上也类似于拟合法，分析比 ε 大或小的部分.

下面的第三类问题比较有意思，涉及到的是任意数列的上极限估计下界，往往可以采用反证法得到强不等式估计，或者直接根据取等去拟合数列.

命题 1.11 (直接利用反证法)

证明：对任意正项数列 $\{a_n\}$，有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq 1$.

证明 反证法，若不然则对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，均有 $n\left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1$，也即化简可得 $\dfrac{a_n}{n}>\dfrac{a_{n+1}}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}$，从而对任意 $m>n$，我们归纳即有

$$\frac{a_n}{n}>\frac{a_m}{m}+\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{a_n}{n}\geq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

这与调和级数发散矛盾！综上即证.

命题 1.12 (较有技巧性的反证法)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上严格单调和连续可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：对于任意的正项数列 $\{x_n\}$，下列不等式成立：

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\{f\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)\right\}^n\geq\mathrm{e}^{f'(1)}.$$

证明 反证法，若不然则对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，均有 $\left\{f\left(\dfrac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)\right\}^n<\mathrm{e}^{f'(1)}$，从而设其有上极限 $\alpha<\mathrm{e}^{f'(1)}$，注意到：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\ln f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\ln\left(1+\frac{f'(\xi_n)}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{f'(\xi_n)},$$

其中 $\xi_n\in\left(1,1+\dfrac{1}{n}\right)$，从而由 $f'(x)$ 的连续性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}^n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{f'(1)}$，进而存在 N 使得任意 $n>N$ 有 $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\in\left(\sqrt[n]{\dfrac{\alpha+\mathrm{e}^{f'(1)}}{2}},\sqrt[n]{\dfrac{3\mathrm{e}^{f'(1)}}{2}}\right)$，即有 $f\left(\dfrac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)<f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，则由 $f(x)$ 单调递增即可得到

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}<1+\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{x_n}{n}-\frac{x_{n+1}}{n+1}>\frac{x_1}{n+1},\quad\forall n>N.$$

从而我们容易得到

$$\frac{x_n}{n}>\frac{x_n}{n}-\frac{x_m}{m}>\sum_{k=n+1}^{m}\frac{x_1}{k}\to+\infty,\quad m\to+\infty,$$

即是矛盾，从而我们有不等式成立，即证.

笔记 这里用到的小于号从而塞数放缩的估计是最精妙的一点，可以很好体现出上下极限的妙用. 本题很多问题的一般推广，更常见的是下面这两种形式:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geq \mathrm{e},\quad \varlimsup_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)>\sqrt{\mathrm{e}^{\pi}}.$$

命题 1.13 (根据取等拟合成等比数列)

设 $\{a_n\}$ 为正项数列，证明：$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n}\geq 4.$

证明 我们考虑 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，若其发散于 $+\infty$，则显然有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n}>\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>4$，从而命题成立，下设上极限存在且为有限数 α，从而任意 $\varepsilon>0$，存在 N，任意 $n>N$，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\alpha+\varepsilon$，从而

$$P_n=\frac{a_1+\cdots+a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{a_N+\cdots+a_{n+1}}{a_n}\geq\left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-N}+\cdots+\frac{1}{\alpha+\varepsilon}+1+\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

若 $0\leq\alpha<1$，则可知存在 ε 使得 $\alpha+\varepsilon<1$，则可知 $P_n\to+\infty$，若 $\alpha\geq 1$，则有

$$\varlimsup_{n\to\infty}P_n\geq\varlimsup_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-N}+\cdots+1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\alpha+\varepsilon}}+\alpha=\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha+\varepsilon-1}+\alpha,$$

从而若 $\alpha=1$，则由 ε 的任意性仍有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}P_n\to+\infty$，则若 $\alpha>1$，则取 $\varepsilon\to 0^+$，则有

$$\varlimsup_{n\to\infty}P_n\geq\frac{\alpha}{\alpha-1}+\alpha=2+\left(\frac{1}{\alpha-1}+\alpha-1\right)\geq 4,$$

综上我们证明了原不等式. 特别的, 容易发现 4 是最优的，因为可以取 $a_n=2^n$.

笔记 本题的关键在于发现取等是等比数列，因此就需要正面去考虑将数列与等比数列产生联系，因此回去考虑相邻两项之比的上极限，这种思想也有一定的洞见性，适合一般推广.

下面这个问题涉及到函数的上下极限的运用，比较巧妙

命题 1.14 (NKU 补充题 C3-B10)

设 $a>0$，$a^2+4b<0$，证明：不存在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有介值性的函数 $f(x)$，使得

$$f(f(x))=af(x)+bx,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 反证法，若存在 $f(x)$，则任意 $f(x_1)=f(x_2)$，有由 $b\neq 0$ 可知 $x_1=x_2$，即为单射从而结合介值性可知其单调，进而为连续函数，且 $f(f(x))$ 为单调递增函数，从而 $f(x)$ 单调递增.

又若 $f(x)$ 有界则 $bx=f(f(x))-af(x)$ 有界，矛盾，从而 $f(+\infty)=+\infty$，故存在 M 使得任意 $x>M$ 有 $f(x)>0$，故有

$$\frac{f(f(x))}{f(x)}=a+b\frac{x}{f(x)},\quad\forall x>M.$$

从而考虑函数 $\dfrac{x}{f(x)}$ 的上极限 $L\geq 0$，则对上式同时取上极限，即有 $\dfrac{1}{L}=a+bL$，从而若 $L=0$，则 $+\infty=a$ 矛盾，若 $L=+\infty$，则 $0=-\infty$ 矛盾，则若 $L\in\mathbb{R}_+$，则 $bL^2+aL-1=0$，而由 $\Delta=a^2+4b<0$ 无解可知矛盾!

综上我们可知不存在这样的函数 $f(x)$，即证.

笔记 由此可以看出上极限的一个好处在于限制条件比极限少，可以方便找出无穷远处的矛盾.

下面讨论的是特殊数列的性质，可以理解为这类数列在上下极限之间取值稠密.

命题 1.15 (子列的稠密性)

若 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，记 $h=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$，$H=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$，则对任何 $\lambda\in[h,H]$，都存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lambda$.

证明 反证法，若不然存在 $\lambda\in(h,H)$ 使得

1.2.2 上下极限的 Stolz 定理与 L'Hospital 法则

1.3 难题选解

命题 1.16

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-a_{n-1})=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 存在，求证 $\{a_n\}$ 极限存在.

证明 记 $\sigma_n=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=a$，则

$$a_n=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}=n(\sigma_n-\sigma_{n-1})+\sigma_{n-1},$$

下证 $n(\sigma_n-\sigma_{n-1})$ 极限为 0，注意到

$$\begin{aligned}0=\lim_{n\to\infty} n(a_n-a_{n-1})&=\lim_{n\to\infty} n\left[(n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1})-((n-1)\sigma_{n-1}-(n-2)\sigma_{n-2})\right]\\&=\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\sigma_n-\sigma_{n-1}\right)-(n-2)\left(\sigma_{n-1}-\sigma_{n-2}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\sigma_n-\sigma_{n-1}\right)-(n-1)\left(\sigma_{n-1}-\sigma_{n-2}\right)\right]+n(\sigma_{n-1}-\sigma_{n-2})\end{aligned}$$

从而设 $b_n=n(\sigma_n-\sigma_{n-1})$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_n-\sigma_{n-1})=0$，从而上式子可化为 $\lim\limits_{n\to\infty}(nb_n-(n-1)b_{n-1})=0$，即：

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(nb_n-(n-1)b_{n-1})+\cdots+(2b_2-b_1)}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{n}\overset{\text{stolz}}{=}\lim_{n\to\infty}(nb_n-(n-1)b_{n-1})=0.$$

故有 $a_n=b_n+\sigma_{n-1}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-1}=a$，即证.

笔记 本题可进一步加强为如下命题：

推论 1.1 (Baby Rudin 习题, 命题 1.7 的加强)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\{n(a_n-a_{n-1})\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\sigma\in\mathbb{R}$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sigma$.

命题 1.17

计算：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right).$$

解 易证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，从而有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n!)}\left(\exp\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mathrm{e}}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right)\text{(这里用到了开头提到的等价代换)}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n+1}\\&\overset{\text{Stolz}}{=}\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{n\to\infty}((n+1)\ln(n+2)-n\ln(n+1)-\ln(n+1))\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

从而极限为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

笔记 本题也可以用反向 Stolz 定理，其中反向的结论可以参考文献.

命题 1.18

设 $\{a_n\}$ 为正数数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a>0$，则对任意 $p>1$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n^p}=0.$$

证明 记 $q=p-1>0$，注意到:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)=0$$

从而记 $M_n=\max\limits_{1\le i\le n}a_i$，且设 $a_{K(n)}=M_n(1\le K(n)\le n)$，从而显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=0$.
故有

$$\begin{aligned}0<\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n^p}&=\frac{a_1\cdot a_1^q+\cdots+a_n\cdot a_n^q}{n\cdot n^q}\\&\le\left(\frac{M_n}{n}\right)^q\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\end{aligned}$$

故可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n^p}=0$$

即证.

笔记 关键在于发现 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

命题 1.19

设 $\{a_n\}$ 为正数数列，且满足

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda(\lambda\in\mathbb{R}),$$

证明：对任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\lambda-\varepsilon}a_n=0$.

证明 我们先证明一个引理:

引理 1.1

对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，存在实数 C_λ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{n^\lambda}=C_\lambda$$

注意到:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{n^\lambda}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda\ln n}}=\mathrm{e}^{\lambda\gamma}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}=\mathrm{e}^{\lambda\gamma}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{\lambda}{k}}{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{k}}}\right)$$

其中 γ 为 *Euler* 常数，故考虑 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)-\frac{\lambda}{k}\right)$，则显见 $\{x_n\}$ 单调递减，且由

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)-\frac{\lambda}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\lambda^2}{k^2}+o\left(\frac{\lambda^2}{k^2}\right)\right)$$

知其收敛于一常数 C'_λ，从而存在 $C_\lambda=\mathrm{e}^{\lambda\gamma+C_\lambda}$，引理得证，回到原题：

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得任意 $n>N$，有 $1+\frac{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}{n}>0$，$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\lambda-\frac{\varepsilon}{2}$，且有

$$\frac{\left(1+\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdots\left(1+\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)/n\right)}{n^{\lambda-\frac{\varepsilon}{2}}}>\frac{C}{2}$$

从而存在正常数 M 使得

$$\left|\frac{a_N}{n^{\lambda-\varepsilon}a_{n+1}}\right|>\frac{\left(1+\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)/N\right)\cdots\left(1+\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)/n\right)}{n^{\lambda-\varepsilon}}>Mn^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

故存在 M' 使得 $\left|n^{\lambda-\varepsilon}a_{n+1}\right|<M'n^{-\frac{\varepsilon}{2}}$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\lambda-\varepsilon}a_n=0$.

笔记 复杂题，思路并不困难，难在对阶的清晰估计

命题 1.20

求实数 A,B 满足：

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n-A\right]=B.$$

笔记 本题就是复杂的估阶问题，一层层取嵌套.

1.4 数列极限竞赛题摘

命题 1.21 (2020CMC-A2)

求极限：

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}.$$

解 简单运用 Stolz 定理即可解决

$$\begin{aligned}I=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}&\overset{\text{Stolz}}{=}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln\left(\frac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+(n+1)^{2020}}{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}\right)}\\&=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}}=\frac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n\cdot(n+1)^{2020}}\\&\overset{\text{Stolz}}{=}\frac{(n+1)^{2020}}{(n+1)\cdot(n+2)^{2020}-n\cdot(n+1)^{2020}}\\&=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2020}+n\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2020}-1\right]}=\frac{1}{2021}\end{aligned}$$

故可知极限为 $\frac{1}{2021}$.

命题 1.22

设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sqrt{a_2} \geq \sqrt{a_1}+1$，且 $\left|a_{n+1}-\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}\right| \leq 1$ 对任意 $n=2,3,\cdots$，求证：

(1) 数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 收敛；　　(2) 若记 $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\lambda^n}\right\}$ 收敛.

证明 为了解决本题，我们需要将数列和一些常见收敛数列建立联系.

(1) 容易发现本题不具有递推关系，更不满足单调收敛定理，因此我们只能利用 Cauchy 收敛的方法，去估计 $\left|\dfrac{a_{m+1}}{a_m}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，而容易发现 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \dfrac{1}{a_n}$，因此我们有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{a_m}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}}, \quad (*)$$

因此我们为了估计上述右边的式子，我们希望 a_n 可以按照一个等比数列进行放缩，因此我们现在希望找到一个 $\alpha>1$ 使得有 $a_{n+1}>\alpha\cdot a_n$ 对任意 n(这个路子让我们产生信心的另一原因是第一个条件)，从而我们有 $\alpha<1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{\sqrt{a_1}}$，这里 α 待定.

进一步为了数学归纳法可以推过去，我们希望有若对任意 $k \leq n$ 均有 $a_k>\alpha a_{k-1}$，也即 $a_n>\alpha^{n-1}a_1$，从而

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_2}{a_1}\right| \leq \frac{1}{a_n}+\cdots+\frac{1}{a_2} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha^k\cdot a_1}<\frac{1}{(\alpha-1)a_1},$$

从而我们有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{a_2}{a_1}-\dfrac{1}{(\alpha-1)a_1}=\dfrac{(\alpha-1)a_2-1}{(\alpha-1)a_1}$，若后者大于 α，即

$$a_1(\alpha-1)^2-(2\sqrt{a_1}+1)(\alpha-1)+1<0,$$

从而容易发现取 $\alpha=1+\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}$ 即满足！故我们有 $a_n>\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^{n-1}\cdot a_1 \to +\infty$，从而 $(*)$ 可以轻松估计.

(2) 为了将 a_n 与 λ 这个极限值建立联系，我们类比在研究 e 时的操作，我们可以采用取极限的手段，由 (1)

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{a_m}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_1}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}=\frac{1}{\alpha^{n-1}a_1\cdot(\alpha-1)}=\frac{\sqrt{a_1}}{a_n},$$

从而令 $m\to+\infty$，则可以得到 $|\lambda a_n-a_{n+1}| \leq \sqrt{a_1}$，即有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\lambda^n}\right| \leq \dfrac{\sqrt{a_1}}{\lambda^{n+1}}$，又易得 $\lambda \geq \alpha>1$，从而由 Cauchy 收敛定理容易判断 $\left\{\dfrac{a_n}{\lambda^n}\right\}$ 收敛，综上即证！

笔记 本题是一个综合性、技巧性极高的题目，关键在于如何放缩转化，本质上方法没有创新，待定系数法揭示了我们这个题的核心，借助等比数列进行估计，只要明确思路了，计算上的技巧都会顺利轻松.

命题 1.23 (2017 伯苓期中考试，2021 浙大数分考研压轴)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，对任意 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(x+1)=f(x)+1$. 令 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n=1,2,\cdots$. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(0)}{\ln n}=a\in\mathbb{R}$，则对任意任意 $x_0\in\mathbb{R}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(x_0)}{n}=0$.

证明 一方面，注意到对任意 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x-2)$，则可知 $f_2(x_1)=f\circ f(x_1)<f\circ f(x_2)=f_2(x_2)$，从而 f_2 单调递增，故利用数学归纳法可得任意 $n\in\mathbb{N}$，均有 f_n 为单调递增函数.

另一方面，我们注意到

$$f_n(x+1)=f_{n-1}\circ f(x+1)=f_{n-1}(f(x)+1)$$
$$=f_{n-2}\circ f(f(x)+1)=f_{n-2}(f_2(x)+1)=\cdots=f(f_{n-1}(x)+1)=f_n(x)+1$$

从而我们有 $f_n(x_0)=[x_0]+f(\{x_0\})$，其中 $0\leq x_0<1$，则由单调性可知

$$\frac{[x_0]+f_n(0)}{\ln n} \leq \frac{f_n(x_0)}{\ln n} \leq \frac{[x_0]+f_n(1)}{\ln n}=\frac{\lceil x_0\rceil+f_n(0)}{\ln n},$$

从而我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(x_0)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(0)}{\ln n}=a$，也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(x_0)}{n}=0$，即证.

命题 1.24 (2011CMC 第三届 T5)

证明：对于任何实数 α，求证存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

证明 我们等价的定义一个单调递增的正整数列 $\{\alpha_n\}$ 来刻画 $\{a_n\}$，即 α_n 表示 $\{a_n\}$ 中前 n 项中 1 的个数，则 -1 恰有 $n-\alpha_n$ 个，从而我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}&=\alpha_n\cdot\sqrt{n+1}+(n-\alpha_n)\cdot\sqrt{n-1}-n\cdot\sqrt{n}\\&=\sqrt{n}\left(\alpha_n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}+(n-\alpha_n)\sqrt{1-\frac{1}{n}}-n\right)\\&=\sqrt{n}\left(\alpha_n\cdot\left[1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+(n-\alpha_n)\left[1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-n\right)\\&=\frac{2\alpha_n-n}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

从而下证，对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，存在单调递增的正整数数列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $0\leq\alpha_n\leq n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\alpha_n-n}{2\sqrt{n}}=\alpha$. 易见对任意 α，对充分大 N，有 $\alpha_n=\left[\frac{n}{2}+\alpha\sqrt{n}\right]$ 从第 N 项开始符合要求，则对 $1,2,\cdots,N-1$，取全为 0 即可得到符合题意的构造，综上我们证明了存在性.

笔记 这种做法的巧妙之处在于转化了构造对象，很精妙！原答案转化为级数的想法来源于 Riemann 重排以及一个很经典的类似结论，但明显复杂的多，这个方法更简练.

命题 1.25 (2018 伯苓期中考试)

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，且

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha+k^\beta},n=1,2,\cdots,$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 的充要条件为 $\alpha>0$ 且 $\max\{\alpha,\beta\}>1$.

证明 我们先证明充分性，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则显然 $\frac{1}{n^\alpha+1}\leq x_n\to 0$，从而 $\alpha>0$，且若 $\max\{\alpha,\beta\}\leq 1$，则由

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha+k^\beta}\geq\frac{n}{n^\alpha+n^\beta}\geq\frac{n^{1-\max\{\alpha,\beta\}}}{2}\geq\frac{1}{2}\not\to 0,$$

可知与 x_n 收敛到 0 矛盾！因此有 $\alpha>0$ 且 $\max\{\alpha,\beta\}>1$.

再考虑必要性，若有 $\alpha>0$ 且 $\max\{\alpha,\beta\}>1$，我们分两类讨论：

Case I. 若 $\alpha>1$，则显然有

$$0<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha+k^\beta}<\frac{n}{n^\alpha}\to 0,\quad 当 n\to+\infty,$$

从而我们有 x_n 收敛到 0，此时得证.

Case II. 若 $\beta>1$ 且 $0<\alpha\leq 1$ 时 (另外一种情形自然蕴含其中)，我们再对 β 进行讨论：

若 $\beta\geq 2$，则有 $\alpha+\beta>2$，从而

$$0<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha+k^\beta}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{n^\alpha k^\beta}}=\frac{1}{2n^{\alpha/2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta/2}},$$

而由 Stolz 定理，我们可知此时后者极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^{\alpha/2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{-\beta/2}}{2\left[(n+1)^{\alpha/2}-n^{\alpha/2}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\beta/2}}{\alpha\cdot n^{\alpha/2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}\cdot n^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}}=0.$$

从而此时有 x_n 极限为 0，下面讨论若 $1<\beta<2$ 的情形，此时有 $1>\beta-1$，则有放缩

$$\begin{aligned}0<x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}+k^{\beta}}=\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^{\beta}}{n^{\alpha}}}\\&\leq\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\beta-1)+\frac{k^{\beta}}{n^{\alpha}}}=\frac{1}{\beta\cdot n^{\alpha}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{k^{\beta}}{n^{\alpha}}}\\&\leq\frac{1}{\beta\cdot n^{\alpha}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k/(n^{\alpha/\beta})}=\frac{1}{\beta\cdot n^{\alpha\cdot(1-1/\beta)}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&\sim\frac{\ln n}{\beta\cdot n^{\alpha\cdot(1-1/\beta)}}\to 0\end{aligned}$$

其中用到了加权平均不等式的放缩 $\lambda x+(1-\lambda)y\geq x^{\lambda}y^{1-\lambda}$，综上我们证明了 x_n 极限为 0.

笔记 本题的关键就在于抓住 α 与 β 的范围进行放缩，难度非常大！尤其是 Case II，放缩过程极为难想，但是其本质的探索方向非常值得借鉴和学习！

命题 1.26 (2013CMC 第五届 T3)

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶连续导数，$f'(0)=1$，$f''(0)\neq 0$ 且 $0<f(x)<x$，$x\in(0,a)$. 令 $x_{n+1}=f(x_n)$，且 $x_1\in(0,a)$，证明：数列 $\{nx_n\}$ 收敛，并求极限.

解 注意到由 $x_{n+1}=f(x_n)\in(0,x_n)$，从而可知 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0，从而 x_n 收敛，则由连续性易证其收敛于 0，从而由 Taylor 展开可知，存在 $\xi_n\in(x_{n+1},x_n)$ 使得

$$x_{n+1}=f(x_n)=f(0)+f'(0)x_n+f''(\xi_n)x_n^2,$$

从而我们有 $x_{n+1}=x_n+f''(\xi_n)x_n^2$，即有

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(1+f''(\xi_n)x_n)}=\frac{1}{x_n}-\frac{f''(\xi_n)}{1+f''(\xi_n)x_n},$$

而由 f 二阶导数连续，从而 $f''(\xi_n)\to f''(0)$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{f''(\xi_n)}{1+f''(\xi_n)x_n}\right)=-f''(0).$$

从而由 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 单调递增且发散到 $+\infty$，则由 Stolz 定理，我们有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}=-\frac{1}{f''(0)}.$$

综上我们有数列 $\{nx_n\}$ 收敛，且极限为 $-\dfrac{1}{f''(0)}$，即证.

笔记 做出本题的一个关键想法就是从特例出发，发现对二次函数的递推，可以通过取倒数用 Stolz，因此类比过去，借助 Taylor 展开近似的转化为二次函数型递推，便可以完成题目.

命题 1.27 (20 级伯苓选拔模拟考试)

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是数列，(α,β) 为一开区间，若对任意 $x\in(\alpha,\beta)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx)=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

证明 我们先证明一个引理，其本质上也是利用了 Kronnecker 定理的稠密性背景.

引理 1.2

设 $\{A_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 都是数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$，则对任意实数 $a<b$，都存在 $x\in(a,b)$，使得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\cos(A_nx+\varphi_n)=1.$$

注意到我们考虑换元 $B_n=\dfrac{A_n}{2\pi}$，$\xi_n=\dfrac{\varphi_n}{2\pi}$，则有 $A_nx+\varphi_n=2\pi(B_nx+\xi_n)$ 从而等价于证明存在 $x\in(a,b)$ 使得有子列 $B_{n_k}x+\xi_{n_k}$ 的小数部分趋向于 0 或 1. 进一步我们不妨设 $\xi_n\in[0,1)$，否则用 $\xi_n'=\xi_n-[\xi_n]$ 来代替，以及 $0<a<b$，若不然则可以用 $A_nx+\varphi_n=A_n(x-2a)+\varphi_n+2aA_n$ 代替.

又注意到任意 $0<\alpha<\beta$ 且 $\beta-\alpha>2$，则显然存在 $m\geq 2$ 且 $m\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\alpha<m-\frac{1}{m}<m+\frac{1}{m}<\beta.$$

从而下面归纳构造 B_{n_k}，ξ_{n_k}，m_{n_k} 以及闭区间套 $(a,b)\supseteq[a_1,b_1]\supseteq\cdots$，使得恒有

$$m_k-\frac{1}{m_k}<B_{n_k}x+\xi_{n_k}<m_k+\frac{1}{m_k},\quad a_k=\frac{1}{B_{n_k}}\left(m_k-\frac{1}{m_k}-\xi_{n_k}\right),\quad b_k=\frac{1}{B_{n_k}}\left(m_k+\frac{1}{m_k}-\xi_{n_k}\right).$$

①$k=1$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=+\infty$，从而存在 n_1 使得 $B_{n_1}>\max\left\{\dfrac{2}{b-a},\dfrac{3}{a}\right\}$，从而存在 $m_1\geq 2$ 使得

$$aB_{n_1}+\xi_{n_1}<m_1-\frac{1}{m_1}<m_1+\frac{1}{m_1}<bB_{n_1}+\xi_{n_1},$$

从而取 $a_1=\dfrac{1}{B_{n_1}}\left(m_1-\dfrac{1}{m_1}-\xi_{n_1}\right)>a, b_1=\dfrac{1}{B_{n_1}}\left(m_1+\dfrac{1}{m_1}-\xi_{n_1}\right)<b$ 满足.

②假设对 k 已成立，从而存在 n_{k+1} 有 $B_{n_{k+1}}>m_kB_{n_k}$，从而存在 m_{k+1} 使得

$$\frac{B_{n_{k+1}}}{B_{n_k}}\left(m_k-\frac{1}{m_k}-\xi_k\right)+\xi_{n_{k+1}}<m_{k+1}-\frac{1}{m_{k+1}}<m_{k+1}+\frac{1}{m_{k+1}}<\frac{B_{n_{k+1}}}{B_{n_k}}\left(m_k+\frac{1}{m_k}-\xi_k\right)+\xi_{n_{k+1}},$$

从而即取 $a_{k+1}=\dfrac{1}{B_{n_{k+1}}}\left(m_{k+1}-\dfrac{1}{m_{k+1}}-\xi_{n_{k+1}}\right)>a_k, b_{k+1}=\dfrac{1}{B_{n_{k+1}}}\left(m_{k+1}+\dfrac{1}{m_{k+1}}-\xi_{n_{k+1}}\right)<b_k$ 满足，从而可知归纳命题成立.

进而可知存在 x 与闭区间套满足 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]\subseteq(a,b)$，进而对任意 k 均有

$$m_k-\frac{1}{m_k}<B_{n_k}x+\xi_{n_k}<m_k+\frac{1}{m_k}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{k\to\infty}\cos(2\pi(B_{n_k}x+\xi_{n_k}))=1,$$

从而我们证明了引理，即证 x 的存在性使得上极限为 1，下面回到原题：

由 $a_n\cos nx+b_n\sin nx=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\xi_n)$，其中 $\xi_n=-\arctan\dfrac{b_n}{a_n}$，从而若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n^2+b_n^2)\neq 0$，则存在 $M>0$ 与子列 $\sqrt{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}>M$，则对 $A_k=n_k$，$\varphi_k=\xi_{n_k}$ 由引理可知存在 $x\in(\alpha,\beta)$ 使得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\cos(n_kx+\xi_{n_k})=1$，则可知 $0=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)>M$ 与题设矛盾！从而可知原题得证.

笔记 非常非常非常复杂的问题，但其实思路还是比较容易发现的，抓住如果 a_n 与 b_n 不为 0，则由稠密性可知会有子列不断趋向一个正值，进而导致矛盾，因此为了说清楚稠密性就需要借助闭区间套进行构造取证明.

命题 1.28 (推论 1.1)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\{n(a_n-a_{n-1})\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\sigma\in\mathbb{R}$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sigma$.

证明 不妨假设 $\sigma=0$，否则用 $a_n-\sigma$ 代替，且不妨假设任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|n(a_n-a_{n-1})|\leq 1$，否则用 $\dfrac{a_n}{M}$ 代替. 从而反证法若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，即存在 $\varepsilon>0$，使得任意 N，存在 $n>N$ 使得 $|a_n|>\varepsilon$，进一步不妨有无穷多 n 使得 $a_n\geq\varepsilon$.

又由 $\sigma_n=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}\to 0$，从而存在 N'，任意 $n>N'$ 有 $|\sigma_n|<\dfrac{\varepsilon^2}{8}$，则取 $n_1>\max\{N,N'\}$，使得 $a_{n_1}\geq\varepsilon$，则由 $\sigma_n\to 0$，可知存在 $n_2>n_1$ 使得 $a_{n_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而取 n_2 为满足的最小下标，从而有任意 $n_1\leq n<n_2$ 成立 $a_n\geq\dfrac{\varepsilon}{2}$，则下面我们估计 σ_{n_2}，

$$\sigma_{n_2}\geq\frac{n_1\sigma_{n_1}+(n_2-n_1)\varepsilon/2}{n_2}\geq-|\sigma_1|+\frac{n_2-n_1}{n_2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\geq-|\sigma_1|+\frac{\varepsilon}{2}\cdot|a_{n_1}-a_{n_2}|,$$

而 $-|\sigma_1|\geq\dfrac{\varepsilon^2}{8}$，$|a_{n_1}-a_{n_2}|\geq\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而有 $\sigma_{n_2}\geq\dfrac{\varepsilon^2}{8}$，矛盾！

笔记 叹为观止，真的绝妙，将放缩理解的浑然天成，把握了各个分量的量级. 其中 n_2 的选取真的巧妙!!!!

第 2 章 实数理论与一元微分学

2.1 稠密性

本节主要给出若干稠密性问题，特别地，给出一个有价值的结论，当作定理.

命题 2.1

设 α 是无理数，则证明：集合 $A=\{n+m\alpha|m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密

(直接利用 *Dirichlect* 逼近定理)

命题 2.2

证明：集合

$$\{\sin n|n\in\mathbb{Z}\}$$

$$\{\cos n|n\in\mathbb{Z}\}$$

均在 $[-1,1]$ 稠密.

(从数列的聚点出发考虑问题)

命题 2.3

证明：数列 $\left\{\dfrac{1}{n\sin n}\right\}$ 发散.

(利用 *Dirichlect* 逼近定理进行放缩估计)

证明 一方面：存在正整数 $n_k\in\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$，从而考虑子列 $\left\{\dfrac{1}{n_k\sin n_k}\right\}$ 则由于 $\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n_k\sin n_k}<\dfrac{1}{n}$，故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k\sin n_k}=0.$$

另一方面：下面证明存在子列不收敛于 0. 因为 π 是无理数，从而由 Dirichlect 定理知，存在无穷多个有理数 $\dfrac{q}{p}$，使得 $\left|\pi-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^2}$，从而也即 $|p-q\pi|<\dfrac{1}{q}$，那么我们断言存在 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{\pi+1}$，使得任意 $N\in\mathbb{N}$，存在 $p>N$ 使得

$$|p\sin p|\leq\left|p\sin\frac{1}{q}\right|\leq\frac{p}{q}<\pi+\frac{1}{q^2}\leq\pi+1$$

故有

$$\left|\frac{1}{p\sin p}-0\right|>\frac{1}{\pi+1}=\varepsilon_0$$

则存在子列不收敛于 0；综上我们证明了数列发散.

定理 2.1

设数列 $\{x_n\}$ 满足以下两个条件：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$；

(2) 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 和任意正整数 N，存在 $m,n>N$，使得 $|x_m-x_n|>1-\varepsilon$.

证明：集合

$$\{\{x_n\}\,|n=1,2,\cdots\}$$

在 $[0,1)$ 中稠密，其中 $\{x_n\}$ 是 x_n 的小数部分.

(一个重要结论)

命题 2.4

证明下列集合在 $[0,1)$ 上稠密：

(1)$\left\{\{\log_a n\}\,|n=1,2,\cdots\right\}$，其中 $a>0,a\neq 1$；

(2)$\{\{n^\alpha\lambda\}\,|n=1,2,\cdots\}$，其中 $\alpha\in(0,1)$，λ 是非零常数；

(3)$\{\{\sin(n^\alpha)\}\,|n=1,2,\cdots\}$，其中 $\alpha\in(0,1)$；

(4)$\left\{\{\sin(\log_a n)\}\,|n=1,2,\cdots\right\}$，其中 $a>0,a\neq 1$；

(5)$\left\{\{\log_a p(x)\}\,|n=n_0,n_0+1,\cdots\right\}$，其中 $a>0,a\neq 1$，且 $p(x)$ 是一个首项系数为正数的实系数多项式，$\deg p(x)\geq 1$，正整数 n_0 大于 $p(x)$ 所有的零点.

(直接推论)

命题 2.5

证明：存在实数 x 使得集合 $\{\{x^n\}\,|n=1,2,\cdots\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密，$\{a\}$ 是 a 的小数部分.

(南开大学数学伯苓班期中考试题)

2.2 完备覆盖理论与函数连续

完备覆盖是另一种研究实数理论的工具，通过这个工具，可以从一个新的视角看待实数理论，其中可以利用这个工具重新证明已经获得的相关结论.

定义 2.1 (完备覆盖)

设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$，记 (其中 Λ 是下标集合)

$$\mathcal{H}=\{[a_\lambda,b_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda}$$

是一簇闭区间族. 特别地，称 $\mathcal{H}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖当且仅当同时满足以下两条性质：

(i) 任意 $[a_\lambda,b_\lambda]\in\mathcal{H}$ 且 $I\subset[a_\lambda,b_\lambda]$，则有 $I\in\mathcal{H}$；

(ii) 任意 $x\in[a,b]$，存在 $\delta(x)>0$，则 $[\alpha,\beta]$ 若满足下面条件则在 $\mathcal{H}$ 中：

$$[\alpha,\beta]\subset[a,b],x\in[\alpha,\beta],0<\beta-\alpha<\delta(x)$$

命题 2.6

从而我们考虑下面几个问题：题目取自邹应习题集第二章第 19 题，第三章 21 题

(1) 证明：若 $\mathcal{H}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖，则 $\mathcal{H}$ 包含 $[a,b]$ 的一个分割

$$\{a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b\}$$

即任意 $i=0,1,\cdots,n-1$ 有 $[x_i,x_{i+1}]\in\mathcal{H}$；

(2) 设 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，令

$$\mathcal{L} = \left\{I | I \subset [a,b]\text{是一闭区间且存在}\lambda \in \Lambda\text{使得}I \subset (a_\lambda, b_\lambda)\right\}$$

证明：$\mathcal{L}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖，并由此推出有限覆盖定理；

(3) 设 X 是一个有界的无限集合并且 $X \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$，令：

$$\mathcal{M} = \left\{I | I \subset [a,b]\text{是一闭区间且使得}I \cap X\text{是有限集}I\right\}$$

证明：若 X 没有聚点，则 $\mathcal{M}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖，并由此推出聚点定理；

(4) 尝试构造闭区间的完全覆盖来证明闭区间连续函数的有界性，介值性以及 Cantor 定理.

2.3 单侧导数相关理论

定义 2.2 (单侧导数)

如果对任意 $x \in (a,b)$，右导数 $f'_+(x)$ 都存在，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上右可导；

如果对任意 $x \in (a,b)$，左导数 $f'_-(x)$ 都存在，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上左可导.

根据定义，探索以下问题：

是否存在函数在区间上处处左不连续，右连续？进一步，考虑处处左不可导，右可导的情形.

(回归定义，利用实数理论的工具寻找矛盾)

我们已经知道，一元函数可导必连续，那么对于单侧导数存在，是否也有相关连续性的结论呢？

命题 2.7 (单侧导数与连续性)

设函数 f 在 (a,b) 上右可导.

证明：存在一个开区间 $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ 使得，$f(x)$ 在 (α,β) 上连续，即间断点不稠密.

下面我们研究单侧导数正负与函数单调性的关系，研究它主要发展出两种方法：

定理 2.2 (单侧导数的符号与单调性——研究方法 1(构造函数))

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一非空开区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 连续且右可导，$\varphi: I \to \mathbb{R}$ 连续且右可导，且有 $\forall x \in I$ 有 $|f'_+(x)| \le \varphi'_+(x)$.

(1) 证明：$\forall a, b \in I$ 且 $a < b$，有

$$|f(b) - f(a)| \le \varphi(b) - \varphi(a)$$

(2) 用左可导代替右可导，研究类似问题；

(3) 利用 $\varphi(x)$ 得到以下两个应用

应用 *1*：处理单调性

证明：若 $\forall x \in I$，$f'_+(x) > 0$，则 f 单调递增；

应用 2：*Lipschitz* 连续与单侧导数的关联结论

证明：设 $f(x)$ 是定义域 I 上的 Lipschlitz 连续函数，并且右可导. 令

$$\mathcal{H}(f) = \inf\{C \ge 0 \mid \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \le C|x - y|\}$$

则有 $\mathcal{H}(f) = \sup\limits_{x\in I} |f'_+(x)|$.

(邹应习题集第四章第 *19* 题)

另一种研究方法就是类比中值定理发展出的结论：

定理 2.3 (单侧导数中值定理)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 右可导，则存在 λ，$\mu \in (a,b)$，使得

$$f'_+(\lambda) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'_+(\mu)$$

命题 2.8 (单侧导数的符号与单调性——研究方法 2(单侧导数中值定理))

请证明上面定理，并解决上题中给出的单调性命题：

(1) 证明定理 1.1 中的应用 2(容易看到这将是平凡的)；

(2) 证明定理 1.1 中的应用 1，得到单调性命题，并进一步证明：若 $\forall x \in (a,b)$，$f'_+(x)=0$，则 f 在 $[a,b]$ 是常值函数；

(3) 若 $f'_+(x)$ 在 (a,b) 连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 可导.

(邹应习题集第四章第 *20* 题)

进一步，单侧导数还有以下结论，我们通过命题的方式给出：

命题 2.9 (单侧导数在区间上下确界的相关问题)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 上右可导，令

$$m = \inf_{x\in(a,b)} f'_+(x), M = \sup_{x\in(a,b)} f'_+(x)$$

(1) 证明：其中 $\overline{S}$ 表示集合 S 的闭包

$$[m,M] = \overline{\left\{ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \middle| x,y \in [a,b], x \ne y \right\}}$$

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上左可导，证明：

$$\inf_{x\in(a,b)} f'_+(x) = \inf_{x\in(a,b)} f'_-(x),\ \sup_{x\in(a,b)} f'_+(x) = \sup_{x\in(a,b)} f'_-(x)$$

(3) 根据 (2) 证明：若 f 在 (a,b) 上可导，则对任一区间 $I \subset (a,b)$，$f'(I)$ 是一个区间，即给出 Darboux 定理的另一证明.

(邹应习题集第四章第 *21* 题)

下面我们将看到单侧导数与函数凹凸性之间的关系：

命题 2.10 (单侧导数与函数凹凸性 (1) 单侧导数的存在性)

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，那么证明：

(1)$\forall x \in (a,b)$，$f'_+(x), f'_-(x)$ 存在并且有限，且 $f'_-(x) \le f'_+(x)$；

(2)$f'_+(a), f'_-(b)$ 存在且

$$-\infty \le f'_+(a) \le f'_-(b) \le +\infty$$

(3)$\forall a \le c < d \le b$，则

$$f'_+(c) \le \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \le f'_-(d)$$

特别地，若 $f(x)$ 严格下凸，则上式不等号均严格.

(邹应习题集第四章第 *24* 题)

命题 2.11 (单侧导数与函数凹凸性 (2) 单侧导数与凹凸性的关联性质)

(1) 证明：$f(x)$ 下凸当且仅当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b)$ 上有单调递增的右导数；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸则证明：$f(x)$ 的不可导点集是至多可数的.

(邹应习题集第四章第 25 题)

命题 2.12 (单侧导数与函数凹凸性 (3) 单侧导数意义下的割线)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上下凸，$u\in(a,b)$，则曲线 $y=f(x)$ 在直线 $y=m(x-u)+f(u)$ 的上方当且仅当

$$f'_-(u)\le m\le f'_+(u)$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 连续且右可导，对任意 $x,u\in(a,b)$，都有

$$f(x)\ge f'_+(u)(x-u)+f(u)$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸.

(邹应习题集第四章第 27 题)

在单侧导数的基础上，我们进一步会考虑减弱条件，因此发展出了如下的混合导数：

定义 2.3 (混合导数)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\forall x\in(a,b)$，f 在 x 处至少右可导或左可导，我们记为 $f'_\varepsilon(x)$，其中 $\varepsilon=\pm1$，我们称 $f'_\varepsilon(x)$ 为 $f(x)$ 的混合导数.

命题 2.13 (混合导数相关结论)

(1) 证明：$\forall x\in(a,b)$，$f'_\varepsilon(x)\ge 0$ 当且仅当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增；

(2) 证明：$\forall x,y\in(a,b)$，且 $x\ne y$，有

$$\inf_{x\in(a,b)} f'_\varepsilon(x)\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le \sup_{x\in(a,b)} f'_\varepsilon(x)$$

(邹应习题集第四章第 22 题)

2.4 微分算子 D 与复数的引入

定义 2.4 (微分算子 D)

对于复值实变函数 F，我们用 DF 表示 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$，一般地，对于复多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

以及 n 阶可导的复值实变函数 F，我们定义

$$P(D)F(x):=a_0F^{(n)}(x)+a_1F^{(n-1)}(x)+\cdots+a_{n-1}F'(x)+a_nF(x),$$

例如，

$$(D^2+2D+\mathrm{i})f(x)=f''(x)+2f'(x)+\mathrm{i}f(x).$$

由于这里推广到了复数值的函数，故引入微分算子可以极大方便我们运算，我们先引入若干性质：

- 对多项式 P,Q，算式 $P(D)$ 与 $Q(D)$ 可交换，即

$$P(D)Q(D)f(x)=(PQ)(D)f(x)=Q(D)P(D)f(x);$$

- 对于复指数函数，我们有很好的性质：

$$P(D)\circ(\mathrm{e}^{\lambda x}f(x))=\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot P(D+\lambda)\circ f(x).$$

证明 我们只需用数学归纳法，注意到

$$D\circ(\mathrm{e}^{\lambda x}f(x))=\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot(D+\lambda)\circ f(x),$$

需要强调的是，如何理解这里的新算子 $D+\lambda$？事实上，这里 λ 可以看作 $\lambda\cdot\mathrm{id}$，id 为恒等映射，从而

$$D^2\circ(\mathrm{e}^{\lambda x}f(x))=D\circ[\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot(D+\lambda)\circ f(x)]=\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot(D+\lambda)^2\circ f(x).$$

从而归纳下去，即可证明该命题，故当微分算子作用的对象里出现 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 时，可以利用上述过程极大简化.

- 最有趣的一个应用莫过于，可以借助对微分算子的 Taylor 展开，将其逆运算 $\dfrac{1}{D+\lambda}$ 转化为 D，即将积分变为求导运算，为了叙述这一结果，我们先定义一般的逆运算：

  我们用 $\dfrac{1}{P(D)}F(x)$ 表示所有函数 $G(x)$ 满足 $P(D)\circ G(x)=F(x)$，特别地，我们有 $\dfrac{1}{D}$ 与 $\dfrac{1}{D+\lambda}$ 的转化

$$\frac{1}{D}\left(\mathrm{e}^{\lambda x}F(x)\right)=\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{1}{D+\lambda}F(x)+C,$$

  这是由于

$$D\circ\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{1}{D+\lambda}F(x)+C\right)=\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot(D+\lambda)\circ\frac{1}{D+\lambda}F(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}F(x).$$

  而对于算子 $D+\lambda$，我们有 Taylor 展开，可以写作

$$\frac{1}{D+\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(1-\frac{D}{\lambda}+\frac{D^2}{\lambda^2}+\cdots\right)=\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{D}{\lambda}\right)^n.$$

命题 2.14 (利用第三条性质避免多次分部积分)

计算不定积分：$\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{3x}\cos 4x\mathrm{d}x.$

解 我们在复数域上考虑问题，则有

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{3x}\cos 4x\mathrm{d}x&=\mathrm{Re}\left(\int x^2\mathrm{e}^{3x+\mathrm{i}4x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{D}x^2\mathrm{e}^{3x+\mathrm{i}4x}\right)\\&=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(3+4\mathrm{i})x}\frac{1}{D+3+4\mathrm{i}}x^2\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(3+4\mathrm{i})x}}{3+4\mathrm{i}}\cdot\sum_{k=0}^{2}\left(-\frac{D}{3+4\mathrm{i}}\right)^k x^2\right)\\&=\left[\left(\frac{3x^2}{25}+\frac{14x}{625}-\frac{234}{15625}\right)\cos 4x+\left(\frac{4x^2}{25}-\frac{48x}{625}+\frac{88}{15625}\right)\sin 4x\right]\mathrm{e}^{3x}+C\end{aligned}$$

笔记 本题有两个在引入微分算子后很神奇的计算方法：一个就是借助 Euler 公式，将三角函数转化为复指数，另一个就是将积分借助 Taylor 展开化为求导！

命题 2.15 (楼红卫 2022 暑校)

设 $f\in[a,b]$，且在 (a,b) 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f''+\alpha f'+\beta\geq 0$，其中 $\alpha^2-4\beta\geq 0$，证明：$f\leq 0$.

证明 我们借助微分算子，即有 $(D^2+\alpha D+\beta)f\geq 0$，从而记 $\delta=\dfrac{\alpha}{2}$，$\gamma=\dfrac{\alpha^2-4\beta}{4}$，则有 $((D+\delta)^2-\gamma)f\geq 0$，而我们熟知 $(D+\delta)^2 f=\mathrm{e}^{-\delta x}D^2\circ(\mathrm{e}^{\delta x}f)$，因此即有 $D^2(\mathrm{e}^{\delta x}f)-\gamma\cdot\mathrm{e}^{\delta x}f\geq 0$，故设 $F=\mathrm{e}^{\delta x}f$，则有 $F''-\gamma F\geq 0$.

(i) 若 $\gamma=0$，则可知 F'' 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，则 $F_{\max}=\max\{F(a),F(b)\}=0$，即有 $F\leq 0$.

(ii) 若 $\gamma>0$，由连续性可设 $F(\xi)=F_{\max}$，其中 $\xi\in(a,b)$，则若 $F(\xi)>0$，从而有 $F''(\xi)\geq\gamma\cdot F(\xi)>0$，则由 $F'(\xi)=0$，从而存在 $\delta>0$ 使得 $F'>0$ 对 $x\in(\xi,\xi+\delta)$，从而 $F(\xi+\delta)>F(\xi)$，与最大性矛盾！从而 $F\leq 0$.

综上由 $F\leq 0$，即可得 $f\leq 0$，即证.

笔记 本题引入微分算子的好处是，极大的方便我们观察出函数的构造，让我们更快将问题化为标准型，这对我们证明的构造起了很大的推进作用.

2.5 函数微分学难题选解

命题 2.16 (问题的简化——楼红卫 2022 暑校)

设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \lambda_i \geq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，且 f 是 $\mathbb{R}$ 上正的单调递减的下凸函数，证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i)\right) \leq \frac{(x_n f(x_1) - x_1 f(x_n))^2}{4(x_n - x_1)(f(x_1) - f(x_n))}.$$

证明 由 f 是单调递减的下凸函数，则有直线 $L: y = \dfrac{f(x_1) - f(x_n)}{x_1 - x_n}(x - x_1) + f(x_1)$ 始终在 f 的上方，对任意 $x \in (x_1, x_n)$，从而我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left[\frac{f(x_1) - f(x_n)}{x_1 - x_n}(x_i - x_1) + f(x_1)\right] := \frac{f(x_1) - f(x_n)}{x_1 - x_n}(X - x_1) + f(x_1), \quad X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

从而也即有转化成下面关于 X 的二次函数

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i)\right) \leq X\left(\frac{f(x_1) - f(x_n)}{x_1 - x_n}(X - x_1) + f(x_1)\right),$$

求其最大值即可见命题成立，即证.

命题 2.17 (经典的难题)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a).$$

证明 设 $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$，从而构造函数 $F(x) = f(x) - Kx - f'(a) + Ka$，其中 $x \in [a,b]$，则 $F(x)$ 在 (a,b) 上可导，在 $[a,b]$ 上具有介值性，且 $F(a) = F(b) = 0$.

若任意 $c \in (a,b)$ 均有 $F(c) = 0$，从而显然成立；

若不然，不妨设存在 $c \in (a,b)$ 使得 $F(c) > 0$，从而由 F 的介值性可知，存在 $\xi \in (a,c), \eta \in (c,b)$ 使得 $F(\xi) = F(\eta) = \dfrac{F(c)}{2}$，故由 F 在 $[\xi,\eta]$ 上连续可导，故由 Rolle 定理可知存在 $\gamma \in [\xi,\eta] \subseteq (a,b)$，使得 $F'(\gamma) = 0$，即 $f''(\gamma) = K$.

综上我们完成了证明.

命题 2.18 (含绝对值问题可以构造新函数)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且存在 $M > 0$ 使得，对任意 $x, t \in \mathbb{R}$，均有

$$|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leq Mt^2.$$

证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且对任意实数 x, t 有

$$|f'(x+t) - f'(x)| \leq Mt.$$

证明 注意到题给条件类似于二阶导数的 Taylor 展开，但很明显差的比较远，又注意到 M 事实上是 $|f''|$ 的上界，这就引导我们去考虑类似于 Taylor 展开的函数，即构造 $g(x) = f(x) + \dfrac{M}{2}x^2$，$h(x) = f(x) - \dfrac{M}{2}x^2$.

从而我们容易发现此时即有 $g(x+t) - 2g(x) + g(x-t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) + \dfrac{M}{2}x^2 \geq 0$，从而可知 g 为下凸函数，同理 h 为上凸函数，则可知 g, h 单侧导数存在，且 $g'_+ \geq g'_-$，$h'_+ \leq h'_-$，也即

$$f'_+(x) + Mx \geq f'_-(x) + Mx, \quad f'_-(x) - Mx \geq f'_+(x) - Mx,$$

从而 $f'_+ = f'_-$，故 f 可导，则 g, h 可导，从而有 g' 单调递增，h' 单调递减即证.

笔记 本题难点在于发现 $g(x)$ 和 $h(x)$，而且要能够想到证明导数存在可以借助单侧导数相等来证明.

命题 2.19 (一个非常综合的难题)

设 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$，若设

$$M = \det\begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1}+1 & x_1^{\lambda_2}+1 & \cdots & x_1^{\lambda_n}+1 \\ x_2^{\lambda_1}+1 & x_2^{\lambda_2}+1 & \cdots & x_2^{\lambda_n}+1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_b^{\lambda_1}+1 & x_n^{\lambda_2}+1 & \cdots & x_n^{\lambda_n}+1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1}-1 & x_1^{\lambda_2}-1 & \cdots & x_1^{\lambda_n}-1 \\ x_2^{\lambda_1}-1 & x_2^{\lambda_2}-1 & \cdots & x_2^{\lambda_n}-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1}-1 & x_n^{\lambda_2}-1 & \cdots & x_n^{\lambda_n}-1 \end{pmatrix},$$

证明：$M > 0$.

证明 为了证明这个命题，先证明两个引理：

引理 2.1

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{U}_n$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{U}_n$ 中元素均为 1，则对任意实数 t，$\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{U}_n) = \det(\boldsymbol{A}) + tC(\boldsymbol{A})$，其中 $C(\boldsymbol{A})$ 是仅与 $\boldsymbol{A}$ 有关的一个常数.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，从而 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{U}_n = (a_{ij}+t)$，则易见 $\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{U}_n)$ 是一关于 t 的多项式，从而无穷次可微，故由行列式的求导法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

故可知，我们对 $\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{U}_n)$ 关于 t 求二阶导即有：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{vmatrix} a_{11}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} = 2\sum_{1\le i<j\le n}\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} = 0.$$

从而可知 $\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{U}_n)$ 是关于 t 的一次函数，则令 $t=0$ 可知常数项即为 $\det(\boldsymbol{A})$，综上即证.

引理 2.2

对任意实数 $b_1,\cdots,b_n$，函数 $P(x) = b_1x^{\lambda_1}+\cdots+b_nx^{\lambda_n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多只有 $n-1$ 个零点.

我们对 n 用数学归纳法，显然当 $n=1$ 时命题成立，则先假设命题对 $n-1$ 成立，若在 n 时不成立，即 $P(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有 n 个零点，从而可知 $Q(x) = x^{-\lambda_1}P(x) = b_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} b_ix^{\lambda_i-\lambda_1}$ 有至少 n 个零点，从而由 Rolle 定理，$Q'(x) = \sum\limits_{i=2}^{n} b_i(\lambda_i-\lambda_1)x^{\lambda_i-\lambda_1-1}$ 至少有 $n-1$ 个零点，与归纳假设矛盾！即知引理成立.

回到原题，设 $\boldsymbol{A} = (x_i^{\lambda_j})$，则有 $M = \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}_n)+\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}_n) = 2\det(\boldsymbol{A})+C(\boldsymbol{A})-C(\boldsymbol{A}) = 2\det(\boldsymbol{A})$. 而我们下证 $\det\boldsymbol{A} > 0$，为此先证明其不为 0，也即可逆.

若不然，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解设为 $(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，也即 $b_1x_i^{\lambda_1}+\cdots+b_nx_i^{\lambda_n} = 0$，任意 $1\le i\le n$，则可知 $P(x)$ 有 n 个不同的零点，与引理 2 矛盾！故可知 $\det(\boldsymbol{A}) \ne 0$.

下再证明 $\det(\boldsymbol{A}) > 0$，考虑连续性方法，引入参数 $t\in[0,1]$，考虑 $\boldsymbol{A}(t) = (x_i^{t\lambda_j+(1-t)j})$，则由 $\det\boldsymbol{A}(t)$ 显然是关于 t 的连续函数，又恒不为 0，从而在 $[0,1]$ 上不变号，又 $\det\boldsymbol{A}(0) = \det(x_i^j)$，由 Vandermonde 行列式可知其大于 0，故 $\det\boldsymbol{A} = \det\boldsymbol{A}(1) > 0$，综上我们完成了证明.

命题 2.20 (20 级伯苓分班模拟考试)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次可导，记 $M_0=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$，$M_1=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，$M_2=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，若 $(b-a)^2M_2\geq 4M_0$，证明：$M_1\leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

证明 对任意 $x\in[s,t]$，考虑 Lagrange 余项的 Taylor 展式，即存在 $\xi_1\in(s,x),\xi_2\in(x,t)$ 使得

$$f(s)=f(x)+f'(x)(s-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(s-x)^2,\quad f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(t-x)^2.$$

进而有 $(t-s)f'(x)=f(t)-f(s)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(s-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(t-x)^2$，则无论在 $[s,t]$ 上 M_1 与 M_2 是否为 0，我们都可以利用绝对值不等式得到如下估计 (注意这里需要细致讨论为 0 时的情形，不过此时就是一次函数或常函数，是 trivial 的)：

$$|f'(x)|\leq\frac{2}{t-s}M_0+\frac{(x-s)^2+(x-t)^2}{2(t-s)}M_2\leq\frac{2}{t-s}M_0+\frac{t-s}{2}M_2,$$

其中用到了二次函数在区间端点处取得最大值，则由连续性可知 M_1 可以在 $[a,b]$ 上取到，设 $|f'(x_0)|=M_1$，则由 $(b-a)^2M_2\geq 4M_0$，则有 $b-a\geq 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，从而存在 $x_0\in(c,d)\subseteq(a,b)$ 且 $d-c=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，故有

$$M_1=|f'(x_0)|\leq\frac{2}{d-c}M_0+\frac{d-c}{2}M_2=2\sqrt{M_0M_2}.$$

综上我们完成了证明.

笔记 这个题目也是旧瓶装新酒，难点就在不像无穷区间可以随便取合适的增量，因此这里就创造性地考虑去选取最大值点单独考虑，这也是一个非常经典但因为被套路困住而想不出来的点，而且这个局部不等式也是相当巧妙. 所以本题价值也很高，提醒我们不要被套路困住.

命题 2.21 (2013CMC，T4)

设 $a>1$，函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微，证明：存在发散于正无穷的正项数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\quad n=1,2,\cdots.$$

证明 反证法，若不存在，即存在 $X>0$，使得任意 $x>X$，恒有 $f'(x)\geq f(ax)$，从而 $f(x)$ 单调递增，则进而取 $x_0>X$，则任意 $x>ax_0$，有

$$\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t\geq\int_{x_0}^{x}f(at)\mathrm{d}t\Longrightarrow f(x)-f(x_0)\geq\frac{1}{a}\int_{ax_0}^{ax}f(t)\mathrm{d}t>\frac{ax-x}{a}\cdot f(x),$$

从而由 $f(x)>0$，可知任意 $x>ax_0$，恒有

$$x\leq\frac{a}{a-1}\left(1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\right)<\frac{a}{a-1},$$

这意味着 x 有界，从而导致矛盾！因此原命题成立，即证.

笔记 本题难度不大，只要注意到反证法的结论很强，再结合积分做一点 trivial 的估计，就可以轻松解决本题.

本章习题主要搜集了关于利用实数理论的一些函数难题 (如一致连续)

第 2 章 练习

1. 对任意无理数 α，任意正整数 k，集合 $\{\{n^k\alpha\}\,|n=1,2,\cdots\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密，其中 $\{x\}$ 是 x 的小数部分.

(参考文献：中等数学 2015 年 12 刊)

2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$\sin f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.
证明：函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

(反证法与一致连续，如何找到数列？进一步如何推广？)

3. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数，并且他们均不为常值函数.
证明：$f(xg(x))$ 不是周期函数.

(利用经典结论：连续 + 周期有一致连续)

4. 设函数 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$，且 f 为双射.
(1) 证明：f 不是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数；
(2) 证明：f 有无穷多个间断点.

(利用经典结论：连续 + 单射有单调)

5. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上可微，且使数集

$$\{x\in[0,1]|f(x)=0=f'(x)\}=\varnothing$$

证明：f 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点.

(反证法与闭区间套定理)

6. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一非平凡子区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 为一单调函数.
证明：f 在 I 上连续，当且仅当 $f(I)\subset\mathbb{R}$ 是一区间.

(邹应习题集第三章第 5 题)

7. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一非平凡子区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 是一函数. 对实数 $a<b$，记

$$\Gamma_{a,b}(f)=\sup\{m\in\mathbb{N}|\exists(s_1,s_2,\cdots,s_{2m})\in I^{2m},s_1<s_2<\cdots<s_{2m},$$
$$f(s_1)>b,f(s_2)<a,\cdots,f(s_{2m-1})>b,f(s_{2m})<a\}$$

我们称 f 在 I 上是**正规**的，如果它连续或仅有第一类间断点，那么证明：
(1) 若任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$，$\Gamma_{a,b}(f)$ 是有限的，则 f 在 I 上是正规的；
(2) 若 I 是有界闭区间并且若 f 在 I 上正规，则对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$，$\Gamma_{a,b}(f)$ 有限.

(邹应习题集第三章第 20 题)

8. 构造反例：
(1) 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 一致连续且恒大于 0，函数 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$，但 $g(x)$ 不在 $\mathbb{R}$ 上一致连续；
(2) 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续可导，且 $f(x)$ 在其上一致连续，但不存在 $X>a$，使得 $f'(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界；
(3) 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续可导，且 $f(x)$ 在其上一致连续，但 $f'(x)$ 不在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

(发散思考，从一些初等函数组合出发优先考虑)

9. 设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 可导.

(1) 证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 不一致连续；

(2) 证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，且 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 一致连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在.

(仔细猜测可能情形，小心论证)

10. 证明下面这个不等式：

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\left(\tan\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1} & \left(\tan\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1} & \cdots & \tan\dfrac{\pi}{2n+1}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\\ \left(\tan\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1} & \left(\tan\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1} & \cdots & \tan\dfrac{2\pi}{2n+1}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \left(\tan\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1} & \left(\tan\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1} & \cdots & \tan\dfrac{n\pi}{2n+1}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\end{vmatrix}$$

$$>\begin{vmatrix}\left(\tan\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}+n(2n+1) & \left(\tan\dfrac{\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}+n(2n+1) & \cdots & \tan\dfrac{\pi}{2n+1}+n(2n+1)\\ \left(\tan\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}+n(2n+1) & \left(\tan\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}+n(2n+1) & \cdots & \tan\dfrac{2\pi}{2n+1}+n(2n+1)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \left(\tan\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}+n(2n+1) & \left(\tan\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}+n(2n+1) & \cdots & \tan\dfrac{n\pi}{2n+1}+n(2n+1)\end{vmatrix}$$

第 3 章 定积分

3.1 换元积分法探究

本节整理关于换元积分法的适用条件，最后的核心定理 3，是由 H.Kestealman 给出. 换元积分法的核心是：

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(G(t))g(t)\mathrm{d}t$$

因此值得探索的问题就是 f 和 g 应该满足什么条件时上式成立.

定理 3.1

$f(x)$ 在区间 $[G(a), G(b)]$ 上连续，$x = G(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导，$g(t) = G'(t)$，则换元积分法成立.

证明 因为 $f(x)$ 连续，从而有原函数 $F(x)$，且 $F(G(t))$ 在 $[a, b]$ 可导，故为 $f(G(t))g(t)$ 的一个原函数，故由 Netwon-Libiniz 公式：

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(G(b)) - F(G(a)) = \int_a^b f(G(t))g(t)\mathrm{d}t$$

定理 1 是目前大部分教材中采用的条件，是 Newton-Libiniz 公式的直接应用，但其限制了 $f(x)$ 只能是连续，事实上，如果我们将"连续"减弱为"可积"，则需要加强 $G(t)$ 保证其单调，即定理 2.

定理 3.2

$f(x)$ 在 $[G(a), G(b)]$ 上可积，$x = G(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导，且恒有 $g(t) = G'(t) \neq 0$，则换元积分法成立.

证明 需要注意的是，$f(G(t))g(t)$ 的可积性并不是平凡的，因此我们需要回归 Riemann 积分的本质去证明.

因为 $g(t)$ 连续且恒不为 0，故不妨假设 $g(t)$ 恒大于 0，故 $G(t)$ 单调递增，从而对 $[a, b]$ 的任一分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$，从而有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n} f(G(t_i))g(t_i)\Delta t_i - \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= |\sum_{i=1}^{n} f(G(t_i))\left[g(t_i) - g(\tau_i)\right]\Delta t_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left[f(G(t_i)) - f(G(\tau_i))\right] g(\tau_i)\Delta t_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\mathrm{d}x|
\end{aligned}$$

从而分段估计即可证明.(这里 τ_i 是微分中值点.)

定理 3.3

如果 $g(t)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，$G(t) = \int_h^t g(w)\mathrm{d}w$($h$ 是 $[a, b]$ 内一固定点)，$f(x)$ 在 $G([a, b])$ 上 Riemann 可积，则换元积分法成立.

证明 我们将通过四个引理来证明本题.

引理 3.1

定义在 $[a,b]$ 上的函数 $\Phi(x)$ 满足存在常数 K 使得对任意 $p,q\in[a,b]$，有

$$|\Phi(p)-\Phi(q)|\le K|p-q|$$

从而对任意 $[a,b]$ 上的零测集 S，有 $\Phi(S)$ 也为零测集.

Proof 1. 注意到 $\Phi(x)$ 满足 Lipisticz 条件，从而其一致连续，故有对任意区间 J，有 $\Phi(J)$ 也为区间，从而对 $\varepsilon>0$，设零测集 S 可被区间 $J_1,J_2,\cdots,J_n,\cdots$ 覆盖，且有

$$\sum_{r=1}^{\infty}|J_r|<\frac{\varepsilon}{K}$$

则可知 $\Phi(S)$ 可被 $\Phi(J_1),\Phi(J_2),\cdots,\Phi(J_n),\cdots$ 覆盖，且

$$\sum_{r=1}^{\infty}|\Phi(J_r)|<\frac{\varepsilon}{K}\cdot K=\varepsilon$$

故 $\Phi(S)$ 为零测集，引理得证.

引理 3.2

按上述定义的 G，如果对 $[a,b]$ 的子集 S 满足 $G(S)$ 是零测集，则 $g(x)$ 在 S 中几乎处处为 0(即 $g(x)\neq 0$ 的点构成 S 里的零测集)

Proof 2. 注意到 $g(x)$Riemann 可积，从而其不连续点构成零测集，下面仅讨论 $g(x)$ 连续点处的取值.

设 S_+ 表示点 x 构成的集合，其中 g 在 x 处连续，且 $g(x)>0$，下证 S_+ 构成零测集.

由连续性知，存在包含 x 的一个闭区间 J_x 使得 $g(x)$ 恒大于 0，且进一步设有正下界 m 和 J_x 的端点为有理数，从而可知 $G(x)$ 在 J_x 上单调递增，故存在反函数 G^{-1}，从而对任意 $p,q\in J_x$，有：

$$|G(p)-G(q)|=g(\xi)|p-q|\ge m|p-q|$$

从而即有 G^{-1} 满足

$$|G^{-1}(G(p))-G^{-1}(G(q))|\le\frac{1}{m}|G(p)-G(q)|$$

又结合 $G(J_x\bigcap S)$ 为零测集，且 G^{-1} 满足 **Lemma 1** 中的条件，故有 $J_x\bigcap S=G^{-1}(G(J_x\bigcap S))$ 为零测集，故 S_+ 可被可数个 $J_x\bigcap S$ 覆盖 (区间端点选取的均为有理数保证)，从而后者为零测集，进一步 S_+ 为零测集. 同理我们考虑 S_-，其也为零测集.

综上有 $\{x|g(x)=0\}=S-S_+-S_--S_{\text{不连续}}$，故 $g(x)$ 几乎处处为 0，引理得证.

引理 3.3

定义 $F(x)=\displaystyle\int_k^x f(t)\mathrm{d}t$($k$ 为 $G([a,b])$ 内固定一点)，从而 $f(G(x))g(x)$ 在 $[a,b]$ 几乎处处连续 (即 Riemann 可积)

Proof 3. 为了证明这个结果，鉴于 $g(x)$ 的不连续点构成零测集，我们仅对 g 的连续点集进行讨论，即下面讨论的 x 均满足 g 在 x 处连续.

Case I. 若 f 在 $G(x)$ 处连续，则命题平凡成立.

Case II. 若 f 在 $G(x)$ 处不连续，但 $g(x)=0$，从而有

$$|f(G(x+h))g(x+h)-f(G(x))g(x)|=|f(G(x+h))g(x+h)|\le M_f\cdot\varepsilon$$

从而可知在 x 处连续 (本质上利用了 $g(x)=0$ 且连续)

Case III. 若 f 在 $G(x)$ 处不连续，且 $g(x)\neq 0$，对前者设满足 f 在 $G(x)$ 处不连续的点集构成 S，从而有 $G(S)$ 构成零测集，故由 **Lemma 2**，知这样的 S 上满足 $g(x)\neq 0$ 的点构成零测集，也即这种情况下满足的点集 S' 是零测的.

综上，$f(G(x))g(x)$ 的不连续点集 $D \subset S' \bigcup D_{g不连续}$，故为零测集，从而引理得证！

引理 3.4

如果 $\Phi(x)$ 满足 Lemma 1 中的条件，且 $\Phi'(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立，则有 $\Phi(a)=\Phi(b)$.

Proof 4. 反证法，不妨假设 $\Phi(a)<\Phi(b)$，从而存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\Psi(b)>\Psi(a)$，其中 $\Psi(x)=\Phi(x)-\varepsilon(x-a)$. 从而由 $\Phi(x)$ 一致连续可知 $\Psi(x)$ 也一致连续.

而 $\Psi'(x)=\Phi'(x)-\varepsilon=-\varepsilon$ 仅在一个零测集 S 上不成立，从而由 **Lemma 1** 知 $\Psi(S)$ 为零测集，故存在 $\eta\in(\Psi(a),\Psi(b))\setminus\Psi(S)$，又 Ψ 连续，从而存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\Psi(\xi)=\eta<\Psi(b)$，并且设 ξ 是最大的那个解.

从而我们有 $\xi\notin S$，且任意 $x>\xi$，有 $\eta=\Psi(\xi)<\Psi(x)<\psi(b)$，而 $\Psi'(\xi)<0$，从而矛盾！

故综上引理 4 得证！

回到原题，由 **Lemma 3** 知 $f(G(x))g(x)$ 几乎处处连续，从而几乎处处有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(G(x))=f(G(x))g(x)$，从而我们考虑函数：

$$\Phi(x)=\int_{G(a)}^{G(x)}f(u)\mathrm{d}u-\int_a^x f(G(t))g(t)\mathrm{d}t=[F(G(x))-F(G(a))]-\int_a^x f(G(t))g(t)\mathrm{d}t$$

故在 $f(G(x))g(x)$ 的连续点处有：

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(G(x))-f(G(x))g(x)=0$$

又注意到 $G(x)$ 也满足 Lipisitch 连续，从而设 f 有上界 M_f，$f(G(t))g(t)$ 有上界 M^*，从而有对任意 $p,q\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}&|\Phi(p)-\Phi(q)|\\&=\left|\int_{G(q)}^{G(p)}f(u)\mathrm{d}u-\int_q^p f(G(t))g(t)\mathrm{d}t\right|\\&\le|G(p)-G(q)|\,M_f+|p-q|M^*\\&\le|p-q|\left(LM_f+M^*\right)\end{aligned}$$

故 $\Phi(x)$ 满足 **Lemma 1** 的条件，从而由 **Lemma 4** 可知，$\Phi(a)=\Phi(b)$，即换元积分法成立！

事实上，尽管在 **Lemma 3** 中我们证明了 $f(G(x))g(x)$ 可积，但事实上在满足定理 3 的条件下，$f(G(x))$ 并不一定可积，下面探索两个例子来研究 $f(G(x))$ 的可积性.

例题 3.1 若添加上条件 $g(x)$ 连续且 $g(x)\neq0$，则在 f 可积的情形下，$f(G(x))$ 一定可积.

证明 注意到 $g(x)$ 连续且恒不为 0，则有 $G(x)$ 单调，从而，对 f 在 $G([a,b])$ 上的任一不连续点 t，存在唯一的 $x\in[a,b]$ 使得 $x=G^{-1}(t)$，故可知 $\mathrm{m}^*(D_{f\circ G不连续})=\mathrm{m}^*(D_{f不连续在G([a,b])})<\mathrm{m}^*(D_{f不连续})$，从而 $f(G(x))$ 的不连续集也构成零测集，即证.

例题 3.2 即使添加上 $g(x)$ 可导，也无法保证 $f(G(x))$ 可积.

解 考虑构造一个 $[0,1]$ 上测度不为 0 的类 Cantor 集，即 $C=[0,1]-\bigcup_{r=1}^{\infty}(a_r,b_r)$，从而我们构造

$$g_r(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^r}(x-a_r)^2(x-b_r)^2\sin\left[\left(\frac{x-a_r}{b_r-a_r}\right)2\pi\right] & x\in(a_r,b_r)\\ 0 & x\notin(a_r,b_r)\end{cases}$$

且 $G(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^x g_r(x)\mathrm{d}x$，从而 $G(x)$ 仅在 C 上取值为 0，其余均为正数，且显见 $0\le G(x)\le\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}=1$，从而构造 $[0,1]$ 上的函数 f 满足 $f\left(\frac{1}{n}\right)=1(n\in\mathbb{N}^*)$，其余点均为 0，从而对任意 $x\in C$，有 $f(G(x))=f(0)=0$，而由 $G(x)$ 连续可知，对任意 $t\in(x,x+\delta)$，$G(t)$ 可以取到无穷多个 $\frac{1}{n}$，也即总有 t 使得 $f(G(t))=f\left(\frac{1}{n}\right)=1\neq0$，从而 $f(G(x))$ 在 $x\in C$ 处均不连续，而 C 不为零测集，从而 $f(G(x))$ 不可积. 即符合题意的构造.

总结. 定理 3 给出了换元积分法的一般适用条件，其仅仅限制了 $G(t)$ 是 $g(t)$ 的变限的积分函数，从而可以解决很多在定理 1 条件下难以解决的问题，下文将给出一例.

例题 3.3 设 $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$，从而计算 $\int_{\frac{1}{2022}}^{1} f\left(\int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right) f(x)\mathrm{d}x$.

3.2 难题选解

定积分极限问题例 8

证明 注意到连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，从而设其值域为 $[m,M]$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(x)}=1$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x\right)-\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x-1\right)-\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x-1-\int_0^1\ln\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left(\sqrt[n]{f(x)}-1-\ln\sqrt[n]{f(x)}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而又 $\sqrt[n]{m}\le\sqrt[n]{f(x)}\le\sqrt[n]{M}$，从而可知

$$0\le\sqrt[n]{f(x)}-1-\ln\sqrt[n]{f(x)}\le\max_{A=m,M}\left(\sqrt[n]{A}-1-\ln\sqrt[n]{A}\right)$$

故有代入可知极限为 0，从而得证.

定积分极限问题 A 组练习 3

证明 答案中采用的办法是换元积分然后用 Henie 定理，十分精妙，这里采用放缩夹逼处理，容易看见有：

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}\le\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^{\sqrt{n}}\frac{2t}{t+1}\mathrm{d}t\to 2-\frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}}\to 2$$

从而计算结果为 2.

在积分极限联系题中，很多题都有着类似的估阶分段的题目，其中可以总结成下面这样的形式：

一类问题的标准形式

设 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数，且可积函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足对任意 $x\in(0,1]$，有 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=a\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

特别地，可以对上式左侧进行阶的估计，展开为 n 的式子. 如 *B* 组练习 *4*，*5*，他们本质上都是下面这个结论：*(即把 $\varphi_n(x)$ 取为特殊的 x^n)*

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且在 $x=1$ 处 k 阶可导，则有下面渐进等式：

$$\int_0^1 x^n f(x)=\frac{f(1)}{n}-\frac{f'(1)}{n^2}+\cdots+\frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{n^{k+1}}+o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$$

对于上面这个问题，如果 $k-1$ 阶连续可导，k 阶可导，则可用分部积分处理，但在题目条件下，或许应该利用 Taylor 展开以及拟合法.

拟合法的一个十分有技巧性的应用是 B 组练习 1，其有两种想法：

想法 1：直接用拟合法，但拟合法一般都是 x^n 且 x 在 $[0,1]$，从而想到直接暴力换元 $t=\cos x$，从而有由 $f(x)$ 可积，$\arccos t$ 连续，故 $f(\arccos t)$ 可积，从而转化为常规问题，分两段利用拟合法即可.

想法 2：拟合法的变通，一般拟合法会出现一个函数列积分极限为定值，但在这题中这个函数列我们可以创造性的选取为 $n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\to 1$，从而我们对 $\dfrac{x}{\sin x}f(x)-A$ 做拟合，依然分段可以得到问题的结果.

练习题 6 的想法

拿到这个问题，很自然的会去产生联想，首先注意到的是 $f(t)$ 与 $\dfrac{1}{f(t)}$ 的两个积分，从而想到 Cauchy-Schwarz 不等式，结合 $f(t)$ 积分的上界估计，我们自然会想到

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\int_1^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\geq(x-1)^2$$

但这和 $f(t)$ 的 $x^2\ln x$ 相差了一个 $\ln x$ 的量级，这个就是问题的难点所在，从而我们去联想为什么这个不等式可以改进量级？想到级数收敛，当 $f(x)$ 是 $x\ln x$ 量级时，积分会为 $x^2\ln x$，那么相当于是级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，那么这个自然是能改进的原因！

从而我们结合证明上面那个级数发散的想法去考虑证明 $\varphi(x)$ 发散，那么同样时按 2 的幂次分段，从而再用 Cauchy-Schwarz 不等式去进行转化，从而把 $\varphi(x)$ 的积分化为级数发散.

3.3 关于积分变限函数的凹凸性问题举隅

命题 3.1

设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的下凸函数，求证：$F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}(x>0)$ 也是下凸函数.

证明 我们更换视角看待问题，为了证明下凸，自然联想到去利用定义，但难处理的有两个地方，一个是分母不同不好加减，另一个是积分上限是变化的，无法自然加减，从而我们试图寻找一个手段处理掉这两个困难.

我们想到，如果把积分变限化为一个定值，比如 1，我们需要进行一个换元操作，而此时我们发现，这个换元恰好可以将分母中的 x 视为一个常数放入 $\mathrm{d}t$ 里！至此我们得到了这个题的做法：

$$F(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\int_0^x f(t)\mathrm{d}\left(\frac{t}{x}\right)=\int_0^1 f(xu)\mathrm{d}u$$

从而即可转化为 f 的凹凸性问题.

命题 3.2

设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负且连续，单调递减，证明：$H(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$ 是下凸函数.

证明 [证明 1]

设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，从而易知 $H'(x)=F(x)-xf(x)$，而任意 $0<x_1<x_2$ 有

$$x_2f(x_2)-x_1f(x_1)\leq(x_2-x_1)f(x_2)\leq(x_2-x_1)f(\xi)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x=F(x_2)-F(x_1)$$

其中利用了积分第一中值定理，从而 $F'(x)$ 单调递增，故有 $F(x)$ 下凸.

证明 [证明 2]

在证明 1 中，我们仍然想通过求二阶导数来判断，但由于 $f(x)$ 不可导，从而无法继续求下去，因此我们自

然想到去利用一些可导的 $\widetilde{f}(x)$ 去逼近 $f(x)$，因此我们构造：

$$\widetilde{f}(x)=f_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha^2}\int_x^{x+\alpha}\left(\int_t^{t+\alpha}f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

易见 $f_\alpha(x)\to f(x)(\alpha\to 0^+)$，从而符合.

3.4 原函数存在性理论

3.4.1 不具有原函数的讨论

3.4.1.1 函数无介值性

定理 3.4

如果函数没有介值性，则一定没有原函数. 即有原函数的函数一定是 Darboux 函数.(这是一个判定的必要条件)

定理 1.1 的证明是平凡的，据此可以延伸出许多比较困难的题目.

命题 3.3

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且对任意实数 x，有

$$\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{2n\text{ 次}}(x)=g(x)$$

其中 n 为正整数，$g(x)$ 为严格单调递减的函数，则 $f(x)$ 一定不存在原函数.

证明 反证法，若 $f(x)$ 有原函数，则其一定具有介值性，从而由题目条件可以得到 f 为单射，从而可以证明 f 为单调函数，但由于复合偶数次，从而 $g(x)$ 一定单调递增，这是矛盾的！从而命题 1.2 得证.

由此可以看出，如果题目中需要判断一个抽象函数是否具有原函数，那么我们往往需要借助映射来辅助去判断介值性.

3.4.1.2 Drboux 函数的性质

在 1.1 节我们可以看出，如果一个函数连介值性都没有，那么一定没有原函数，从而我们在这一节中罗列一些介值函数的性质，如果一个函数对下文中的这些性质都不满足，那么也一定没有原函数.

命题 3.4

f 是定义在区间 I 上的 Darboux 函数当且仅当对任意区间 $J\subset I$，有 $f(J)$ 为区间.

命题 3.5

我们讨论 Darboux 函数的间断点可能具有的情形，为此，我们先把所有可能的间断点罗列出来，逐一排除：

(a) 可去间断点；(左右极限均存在，但该点处函数值不为极限值)

(b) 跳跃间断点；(左右极限存在且不相等)

(c) 第二类间断点——(左右极限不存在且有一个为无穷型间断点)

(d) 第二类间断点——(左右极限不存在且有一个为震荡型间断点)

如果有 (a)(b) 类间断点，则不会具有介值性，证明容易；

对于 (c) 类间断点，考虑函数 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，从而

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则显而易见 0 是 $f(x)$ 的一个 (c) 类间断点，且 $f(x)$ 为导函数，从而肯定具有介值性；

对于 (d) 类间断点，考虑函数 $G(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，从而

$$g(x)=G'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则显而易见 0 是 $g(x)$ 的一个 (d) 类间断点，且 $g(x)$ 为导函数，从而肯定具有介值性.

综上，具有介值性的函数有且仅可能有第二类间断点.

命题 3.6

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性，且对其值域 $f([a,b])$ 上的任一值只能取到有限次，则 $f(x)$ 一定连续.

命题 1.5 的证明比较复杂，参考：胡学东, & 谢承蓉. (2001). 关于函数介值性质的几点探讨.

关于 Darboux 函数，还有一些奇奇怪怪的例子：

例题 3.4 存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Darboux 函数，使得其可以把定义域上任一开区间映射为闭区间.

例题 3.5 存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Darboux 函数，使得其可以把定义域上任一点的领域映射为 $\mathbb{R}$.

例题 3.6 对任一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$，总存在两个无处连续的 Darboux 函数 $f_1(x), f_2(x)$，且使得 $f=f_1+f_2$.

例题 3.7"Traian Lalescu" problem solving contest，2003

存在一个定义在 $[0,1]$ 的 Darboux 函数 $f:[0,1]\to[0,1]$，满足存在 $A,B\subset[0,1]$，且 $A\bigcup B=[0,1], A\bigcap B=\emptyset$，$f(A)\subset B, f(B)\subset A$.

上面四个例子涉及到实变函数相关知识，难度比较大.

3.4.2 具有原函数的充分条件

3.4.2.1 连续函数必有原函数

定理 3.5

设 $f(x)$ 在定义域区间上连续，则其一定有原函数，且可表示为：

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$$

其中 a 是区间内一点.

根据这个命题，我们自然会想到，能否把“连续”减弱为“可积”？但 $\operatorname{sgn}(x)$ 这个例子告诉我们不行. 进一步思考，其不行的原因在于其连介值性都不具有，因此如果我们摒弃掉这种可能性呢，是否一定有原函数？遗憾的是，下面这个命题给出了否定的回答.

命题 3.7 (第八章小练习问题 4)

存在一个可积的 Darboux 函数，使得其没有原函数.

解 我们考虑函数 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，容易发现其仅有 $x=0$ 一个间断点，从而可积，其介值性也是容易看出的. 假设其在 $[-1.1]$ 上有原函数 $F(x)$，则由可积知 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+C=x^2\sin\frac{1}{x}+C'$，但此时 $F'(0)=0\neq 1$，从而其没有原函数.

因此这个例子也表明，可积与有原函数之间的关系十分浅薄. 值得一提的是，类似于这个例子，也可以构造出有界的具有原函数的函数，但其不可积.

3.4.2.2 $f(x)g(x)$ 型函数原函数存在性的相关结论

定理 3.6

设 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数，$g(x)$ 在 I 上连续可微，从而 $f(x)g(x)$ 有原函数.

证明 [证明] 本质上是利用了分部积分的思想.

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，从而 $F(x)g'(x)$ 有原函数 $G(x)$. 从而容易验证 $F(x)g(x)-G(x)$ 是 $f(x)g(x)$ 的原函数. 思路来源:

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}\left(F(x)\right)=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\mathrm{d}x=F(x)g(x)-G(x)+C$$

从而定理得证.

例题 3.8 设 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上有原函数，则 $f(x)\tan x$ 有原函数.

例题 3.9 设 $f(x)$ 有原函数，则 $|x|f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有原函数.

定理 3.7

设 $f(x)$ 为区间 I 上有上界或有下界且有原函数，$g(x)$ 在 I 上连续，从而 $f(x)g(x)$ 有原函数.

证明 [证明] 不妨假设 $f(x)$ 有下界，从而存在 C 使得 $h(x)=f(x)+C>0$，从而有 $h(x)$ 也有原函数 $H(x)$，且 $H'(x)=h(x)>0$ 故其单调递增，故存在连续的反函数 $H^{-1}(x)$，则有 $g(H^{-1}(x))$ 连续故有原函数，从而

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int h(x)g(x)\mathrm{d}x-CG(x)=\int g(x)\mathrm{d}(H(x))-CG(x)=\int g(H^{-1}(x))\mathrm{d}x-CG(x)$$

故有原函数，定理得证.

3.5 定积分判断题思路整理

问题 1

证明 [歧义] 如果默认 $f'(x)$ 可积，那由 Netwon-Libiniz 定理即可证明 (微分中值定理证明)，但如果假设 $f'(x)$ 可以不可积，那么存在有原函数但不可积的函数，如 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

问题 2

证明 [正确] 注意到对 $[a,b]$ 的任意分割 $T=\{a=x_0,x_1,x_2\cdots,x_n=b\}$，从而有

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(F(x_{k+1})-F(x_k)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\leq I^*$$

Remark. 事实上这个题的一个隐含问题是 $f(x)$ 是否可积？因为显而易见当其有界时这样的函数并不易构造，详细可参考 Giornale de Battaglin(Volterra,V.,1981)

问题 3

证明 [正确] 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $f_1(x), f_2(x)$ 使得 $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$，且存在 $[a,b]$ 的分划 T 使得有

$$0\leq \sum_k M_k\Delta x_k-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}, 0\leq \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\sum_k m_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{3}$$

从而有对 $f(x)$ 的振幅有

$$\begin{aligned}\sum_k \omega_k\Delta x_k &\leq \sum_k (M_k-m_k)\Delta x_k\\ &\leq \left(\sum_k M_k\Delta x_k-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\right)+\left(\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\sum_k m_k\Delta x_k\right)+\left(\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

故可积，从而命题正确.

问题 4

证明 [错误] 我们考虑函数 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，容易发现其仅有 $x=0$ 一个间断点，从而可积，其介值性也是容易看出的. 假设其在 $[-1.1]$ 上有原函数 $F(x)$，则由可积知 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t+C=x^2\sin\frac{1}{x}+C'$，但此时 $F'(0)=0\neq 1$ 矛盾！故错误.

问题 5

证明 [正确] 我们首先证明如果 $f(x)$ 仅有有限个零点，则结论成立；

设 $f(x)$ 有零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，由连续性，从而存在一个 n 次多项式 $P(x)$ 与 $f(x)$ 始终同号，故考虑 $\varphi(x)=P(x)(x-a)^2(x-b)^2$，可知 $f(x)\varphi(x)\geq 0$ 恒成立，从而有 $f(x)\equiv 0$，即证.

如果 $f(x)$ 有无穷多个零点，则我们可以将 $[a,b]$ 划分为区间使得 $f(x)$ 零点稠密或有限个，由连续性知若零点稠密则处处为 0，故在零点有限个的地方置为同号多项式，故由上述可知得出 $f(x)\equiv 0$.

问题 6

证明 [正确] 这个明显不一定，只需在经典构造上做出适当改变：

构造 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}1 & x\text{为代数数}\\ -1 & x\text{为非代数数}\end{cases}$，则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\text{或为非代数数}\\ -1 & x\in\mathbb{Q}^c\text{且为代数数}\end{cases}$

显见 $f(x)g(x)$ 不可积.

问题 7

证明 [正确] 我们可以证明一个更一般的结论：

$S(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 "$S(f(x))$ 可积蕴含 $f(x)$ 可积" 的充要条件是 $S(x)$ 单调递增.

我们通过不连续点集是否为零测集来证明，我们在本题中证明必要性. 由 $S(f(x))$ 可积知 $S(f(x))$ 的不连续点构成零测集合，从而我们下面希望 $f(x)$ 的不连续点都是 $S(f(x))$ 的不连续点.

设 x_0 为 $g(x)$ 的一个不连续点，从而存在 $\varepsilon_0>0$ 使得任意 $B(x_0,r)$，均存在 $x^*\in B$ 使得 $|f(x^*)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$，从而由 $S(x)$ 单调递增，可知存在 δ_0 使得总有 $|S(f(x^*))-S(f(x_0))|\geq\delta_0$，即不连续.

从而有 $D_f\subset D_{S\circ f}$，故 $f(x)$ 可积，即证必要性.

故对题给函数 $S(x)=2x+\sin x$，显见其单调递增，故可知本题正确.

问题 8

证明 [错误] 我们这里给出问题 7 中引理的充分性证明，特别地，思路类似，仅给出本题的构造.

注意到 $S(x)=x+2\sin x$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)$ 递增，在 $\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$ 上递减，从而存在 $x_1\in\left(0,\frac{2}{3}\pi\right), x_2\in\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$ 使得 $S(x_1)=S(x_2)$，从而构造 $f(x)=\begin{cases}x_1 & x\in\mathbb{Q}\\ x_2 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ 即知是一个反例.

问题 9

证明 [正确] 我们先证明对上积分也具有区间可加性，即有 $\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x+\overline{\int_b^c} f\mathrm{d}x=\overline{\int_a^c} f\mathrm{d}x$.

一方面，对 $[a,c]$ 的任一分割 T，如果分割点包含 b，则有其 Darboux 上和 $S(T)$ 可以分为 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 上的两个分割的 Darboux 上和 $S_1(T_1),S_2(T_2)$，此时 $S(T)=S_1(T_1)+S_2(T_2)$. 另一方面，如果分割不含 b，从而有设 $f(x)$ 上界为 M，则有 $0\le S(T)-S_1(T_1)-S_2(T_2)\le 2M\Delta(T)$，这个式子对第一种情况也成立，从而令 $\Delta(T)\to 0$，则有引理成立，即具有区间可加性.

从而有对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{M}$，则有任意 $t\in B(t_0,\delta)$，有

$$|I^*(t)-I^*(t_0)|=\left|\int_t^{t_0} f\mathrm{d}x\right|\le M\delta<\varepsilon$$

从而命题成立，即上积分的变限函数也是连续的.

问题 10

证明 [正确] 我们先给出一个比较一般的引理：

引理 3.5

若 $p(x)$ 有上界或下界且有原函数，$q(x)$ 连续，则 $p(x)q(x)$ 有原函数.

Proof: 不妨假设 $p(x)$ 有下界，从而存在 C 使得 $h(x)=p(x)+C>0$，从而有 $h(x)$ 也有原函数 $H(x)$，且 $H'(x)=h(x)>0$ 故其单调递增，故存在连续的反函数 $H^{-1}(x)$，则有 $q(H^{-1}(x))$ 连续故有原函数，从而

$$\int p(x)q(x)\mathrm{d}x=\int h(x)q(x)\mathrm{d}x-CQ(x)=\int q(x)\mathrm{d}(H(x))-CQ(x)=\int q(H^{-1}(x))\mathrm{d}x-CQ(x)$$

故有原函数，引理得证.

回到原题，设 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，从而其连续，$g'(x)$ 可积则其有界，故由引理可知 $F(x)g'(x)$ 有原函数 $G(x)$，从而有 $f(x)g(x)$ 有原函数 $F(x)g(x)-G(x)$，故命题成立.

3.6 定积分竞赛题摘

命题 3.8 (利用积分进行估计)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导数 $f'(x)$，我们记：

$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|, M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|, M_{1+\alpha}=\sup_{x,y\in\mathbb{R},x\ne y}\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

其中 $\alpha\in(0,1]$，并且 $M_0,M_1,M_{1+\alpha}<+\infty$. 证明：存在只依赖于 α 的 $\lambda\in(0,1)$，满足：

$$M_1\le 2(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}}(M_0)^{1-\lambda}(M_{1+\alpha})^\lambda.$$

证明 注意到对任意 $x\in\mathbb{R}$，$h>0$，有

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x-h)-2f'(x)h|&=\left|\int_{x-h}^{x+h}f'(t)\mathrm{d}t-\int_{x-h}^{x+h}f'(x)\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_{x-h}^{x+h}(f'(t)-f'(x))\,\mathrm{d}t\right|\\&\le\int_{x-h}^{x+h}|f'(t)-f'(x)|\,\mathrm{d}t\\&\le\int_{x-h}^{x+h}M_{1+\alpha}|t-x|^\alpha\,\mathrm{d}t=2\frac{M_{1+\alpha}}{1+\alpha}h^{1+\alpha}\end{aligned}$$

进而有任意 $x\in\mathbb{R}$，$h>0$，有

$$|2f'(x)h|\le|f(x+h)|+|f(x-h)|+2\frac{M_{1+\alpha}}{1+\alpha}h^{1+\alpha}\le 2M_0+2\frac{M_{1+\alpha}}{1+\alpha}h^{1+\alpha},$$

进而有对任意 $h>0$，有

$$M_1\le\frac{M_0}{h}+\frac{M_{1+\alpha}}{1+\alpha}h^\alpha,$$

进而由加权均值不等式：

$$\begin{aligned}\frac{M_0}{h}+\frac{M_{1+\alpha}}{1+\alpha}h^{\alpha}&=\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{(1+\alpha)M_0}{\alpha h}\right)+\frac{1}{1+\alpha}\left(M_{1+\alpha}h^{\alpha}\right)\\&\geq\frac{1+\alpha}{\alpha^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\cdot(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}}M_0^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}M_{1+\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha}}\end{aligned}$$

从而我们取 $\lambda=\dfrac{1}{1+\alpha}$，可知证明了一个更强的结果 (由 $\dfrac{1+\alpha}{\alpha^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}<2$)：

$$M_1\leq\frac{1+\alpha}{\alpha^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\cdot(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}}M_0^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}M_{1+\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

笔记 当面对离散形式的结果时 (比如无理式的幂次)，可以利用积分去处理这样的结果.

命题 3.9

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\arctan\dfrac{k}{n}}{n+k}\cdot\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{3\ln 2}{4\pi}.$$

其中 $\varphi(m)$ 是 Euler 函数，表示不超过 m 且与与 m 互素的数的个数.

证明 我们先证明一个引理，这是对 $\dfrac{\varphi(k)}{k}$ 的处理：

引理 3.6

我们有以下阶的估计：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{6}{\pi^2}\cdot n+O(\ln n).$$

为了证明这个引理，我们引入 Mobius(莫比乌斯) 函数 $\mu(n)$ 满足：$\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\text{有平方素因子}.\\ (-1)^s & n=p_1p_2\cdots p_s\end{cases}$

从而显见：

$$\frac{\varphi(k)}{k}=\prod_{p\mid k}\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{p^{\alpha}}=\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)}{d}.$$

进而：

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d=1}^{n}\left[\frac{n}{d}\right]\cdot\frac{\mu(d)}{d}\\&=\sum_{d=1}^{n}\frac{n}{d}\cdot\frac{\mu(d)}{d}-\sum_{d=1}^{n}\left\{\frac{n}{d}\right\}\cdot\frac{\mu(d)}{d}\\&=n\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d=1}^{n}\left\{\frac{n}{d}\right\}\cdot\frac{\mu(d)}{d}-n\sum_{d=n+1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\end{aligned}$$

而注意到

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}=\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{(-1)^k}{p_1^2\cdots p_k^2}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-1/p^2}\right)^{-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1}=\frac{6}{\pi^2},$$

$$\left|\sum_{d=1}^{n}\left\{\frac{n}{d}\right\}\cdot\frac{\mu(d)}{d}\right|\leq\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}=O(\ln n)\ ,\ n\left|\sum_{d=n+1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right|\leq n\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)=O(1)\ .$$

综上引理：$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{6}{\pi^2}\cdot n+O(\ln n)$ 得证. $\square$

回到原题，由 Abel 求和：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\arctan\frac{k}{n}}{n+k}\cdot\frac{\varphi(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\arctan\frac{k}{n}}{n+k}-\frac{\arctan\frac{k+1}{n}}{n+k+1}\right)\cdot S_k+\frac{\arctan 1}{2n}\cdot S_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f'(\xi_k)}{n^2}\cdot S_k+\frac{\arctan 1}{2n}\cdot S_n$$

其中对 $f(x)=\frac{\arctan x}{1+x}$ 用了 Lagrange 中值定理，$\xi_k\in\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$.

进而由等价代换 $S_n=\frac{6}{\pi^2}\cdot n+O(\ln n)$，可知：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f'(\xi_k)}{n^2}\cdot S_k+\frac{\arctan 1}{2n}\cdot S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f'(\xi_k)}{n^2}\cdot\frac{6k}{\pi^2}+\frac{\arctan 1}{2n}\cdot\frac{6n}{\pi^2}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
$$=\frac{3}{4\pi}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6}{\pi^2}\cdot f'(\xi_k)\cdot\frac{k}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
$$\to\frac{3}{4\pi}+\frac{6}{\pi^2}\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{6}{\pi^2}\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$$

而又有：

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\arctan x\mathrm{d}\left(\ln(1+x)\right)=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2,$$

其中最后一步利用了 Putanam 竞赛题的一个经典结果，综上我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\arctan\frac{k}{n}}{n+k}\cdot\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{3\ln 2}{4\pi},$$

即证！

笔记 相当十分极其困难的问题，这里面包含几个思想：

(1) 对于这种类型的“变种”积分和型极限，一个处理手段就是研究多出的一项和的关系 (如果单独看某一项没有特殊性质的话，比如本题是离散函数)，利用 Abel 求和公式进行转化，其中中值定理的使用是关键的；

(2) 证明过程中最后取极限的步骤并不严谨，两个积分区间的点能不能互化，这个严格证明起来比较繁琐，但其实是平凡的，回归定义加减一项，减去的放缩掉即可；

(3) 最后这个求积分也不是平凡的，蕴含着一个普特南的竞赛题，也是困难的.

命题 3.10 (2018 伯苓班数分 3-2 期中)

设 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，计算：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{x^{2021}\right\}\cos x\mathrm{d}x.$$

解 注意到函数的奇偶性，可以立即得到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{x^{2021}\right\}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left\{x^{2021}\right\}+\left\{-x^{2021}\right\}\right)\cos x\mathrm{d}x,$$

而注意到我们有 $\{x\}+\{-x\}=(x-[x])+(-x-[-x])=\begin{cases}1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$，而注意到当 $x\in 0,\frac{\pi}{2}]$ 时，只有有限个点使得 $\left\{x^{2019}\right\}+\left\{-x^{2019}\right\}\neq 1$，从而我们熟知当函数改变有限个点处的值时积分不变，因此我们立即可以得到：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left\{x^{2021}\right\}+\left\{-x^{2021}\right\}\right)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1.$$

笔记 本题最精彩的想法就在于：当函数改变有限个点处的值时积分不变！

命题 3.11 (2010 CMC,T4)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，且 $f(1)=0$，在 $x=1$ 处可导，$f'(1)=a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=-a.$$

证明 我们对 $f(x)$ 用 Peno 余项作 Taylor 展开，也即

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+r(x),$$

从而任意 $\varepsilon>0$，由 $r(x)=o(x-1)$，从而结合 $f(x)$ 在 1 处可导知局部连续，则存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in(1-\delta,1)$，有 $|f(x)|\le\varepsilon(1-x)$，从而有

$$n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=n^2\int_0^1 x^n f'(1)(x-1)\mathrm{d}x+n^2\int_0^1 x^n r(x)\mathrm{d}x=\frac{-a\cdot n^2}{(n+1)(n+2)}+n^2\int_0^1 x^n r(x)\mathrm{d}x,$$

从而进一步有

$$\begin{aligned}\left|n^2\int_0^1 x^n r(x)\mathrm{d}x\right| &\le n^2\left|\int_0^\delta x^n r(x)\mathrm{d}x\right|+n^2\left|\int_\delta^1 x^n r(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\le n^2\delta^n+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\cdot\varepsilon\to\varepsilon\end{aligned}$$

从而由 ε 的任意性可知极限为 $-a$，即证.

笔记 本题的关键在于用 Peno 余项表示 $f(x)$，这种做法能最精确的估阶和误差，小技巧，值得学习！

命题 3.12 (2011CMC,T2)

设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数，证明：存在 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi)\le\prod_{k=1}^n\left(\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x\right).$$

证明 我们不妨设 $f_k(x)(1\le k\le n)$ 均为正值函数，因为易见若存在 ξ 与 k 使得 $f_k(\xi)=0$，则此时不等式左端为 0 显然成立！因此我们由 Jessen 不等式，可知对上凸函数 $\ln x$，有

$$\ln\left(\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x\right)\le\int_0^1\ln f_k(x)\mathrm{d}x,\quad 1\le k\le n,$$

从而我们对连续函数 $F(x)=f_1(x)\cdots f_n(x)$，其在 $[0,1]$ 上有最小值，不妨设为 $F(x)_{\min}=F(\xi)$，则显然有

$$\ln F(\xi)\le\int_0^1\ln F(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_0^1\ln f_k(x)\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^n\ln\left(\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x\right)\le\ln\prod_{k=1}^n\left(\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x\right).$$

从而由 $\ln x$ 的单调性可知原不等式成立，即证！

笔记 本题的关键在于利用积分形式的 Jessen 不等式放缩，将积分里分开的 f_k 乘起来，这是一个不容易想到的点. 另一方面也可以将右侧定值除到左侧，利用均值放缩，这是标准答案的做法.

命题 3.13 (周期性在定积分中的转化)

设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且恒大于 0，周期为 1，则对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，证明：

$$\int_0^1\frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\mathrm{d}x\ge 1.$$

证明 证法 1. 常规做法，利用极限

我们注意到

$$\int_0^1\frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\mathrm{d}x=\int_{-\alpha}^{1-\alpha}\frac{f(x+\alpha)}{f(x+2\alpha)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x+2\alpha)}\mathrm{d}x.$$

从而我们由 Cauchy 不等式可以得到

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x+2\alpha)}\mathrm{d}x\right)\\ \geq&\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{f(x)}{f(x+2\alpha)}}\mathrm{d}x\right)^2\geq\left(\int_0^1 \sqrt[4]{\frac{f(x)}{f(x+4\alpha)}}\mathrm{d}x\right)^2\\ \geq&\cdots\geq\left(\int_0^1 \sqrt[2^n]{\frac{f(x)}{f(x+2^n\alpha)}}\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

而注意到 $f(x)$ 是恒正的连续函数，从而有任意 $x,y\in\mathbb{R}$，有 $\dfrac{f(x)}{f(y)}$ 有界，从而可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[2^n]{\frac{f(x)}{f(x+2^n\alpha)}}\mathrm{d}x\right)^2=1.$$

故由极限的保序性可知任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，有 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\mathrm{d}x\geq 1$，即证.

证明 证法 2. 笔者的奇思妙想

不妨设 $\alpha\in[0,1]$，构造 $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}\mathrm{d}x$，则显见其也是周期为 1 的函数，下证其连续，由 f 连续周期且恒正，则设 $m\leq f\leq M$，从而任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得任意 $|\alpha_1-\alpha_2|<\delta$，有 $|f(x+\alpha_1)-f(x+\alpha_2)|\leq\dfrac{m^2}{M}\varepsilon$. 故有

$$|F(\alpha_1)-F(\alpha_2)|=\left|\int_0^1 \frac{f(x)(f(x+\alpha_1)-f(x+\alpha_2))}{f(x+\alpha_1)f(x+\alpha_2)}\mathrm{d}x\right|\leq\frac{M}{m^2}\cdot\frac{m^2}{M}\varepsilon=\varepsilon.$$

故可知 F 连续，又注意到 $F(0)=F(1)=1$，且对任意有理数 $\dfrac{q}{p}\in(0,1)$，有

$$F\left(\frac{q}{p}\right)=\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+q/p)}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{f(x+q/p)}{f(x+2q/p)}\mathrm{d}x=\cdots=\int_0^1 \frac{f(x+(p-1)q/p)}{f(x+q)}\mathrm{d}x.$$

从而由 Holder 不等式，我们有

$$\left(F\left(\frac{q}{p}\right)\right)^p=\prod_{k=1}^{p}\left(\int_0^1 \frac{f(x+(k-1)q/p)}{f(x+kq/p)}\mathrm{d}x\right)\geq\left(\int_0^1 \sqrt[p]{\frac{f(x)}{f(x+q)}}\mathrm{d}x\right)^p=1.$$

从而我们有对任意有理数有 $F(\alpha)\geq 1$，从而由连续性可知对所有实数均成立.

笔记 对于一些离散量的问题，借助周期性可以近似的转化成 $\{n\theta\}$ 稠密这类问题.

命题 3.14 (2018 伯苓班数分 II 期末压轴)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且对任意实数 a,b，都有

$$f(a)+f(b)\geq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒等于 0.

证明 注意到任意 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(x)\geq 0$，从而下有界，故设 $A=\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x)$，我们断言 $A<+\infty$，若不然，即 $\varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，从而取定 a，对充分大的 x，成立

$$2f(x)\geq f(a)+f(x)\geq\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\geq\frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$

即有 $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{2f(x)}{\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\leq 0$，从而函数 $F(x)=\ln(x-a)+2\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}$ 在充分大的 X 后单调递减，而显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$，从而矛盾！

若 $A>0$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在数列 $\{x_n\}\to+\infty$ 且任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 使得 $A\le f(x_n)<A+\varepsilon$，则有

$$2(A+\varepsilon)\ge f(x_1)+f(x_n)\ge\int_{x_1}^{x_n}f^2(x)\mathrm{d}x\ge(x_n-x_1)A^2,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

进而有 $\dfrac{A^2}{A+\varepsilon}\le\dfrac{2}{x_n-x_1}$，令 $n\to\infty$，则有 $\dfrac{A^2}{A+\varepsilon}\le0$，则结合 ε 的任意性有 $A=0$，矛盾！同理我们有 $\varliminf\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，故可知

$$0\le\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\le\varliminf_{n\to+\infty}f(x)+\varliminf_{n\to-\infty}f(x)=0,$$

即证 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒等于 0，即证.

笔记 非常精炼的证明了题目，核心在于对于函数下极限的巧妙应用，精彩巧妙，再次体现出来上下极限对于分析问题的强大作用. 但遗憾的是，证明下极限不为 $+\infty$ 时，仍需要借助不等式的估计.

命题 3.15 (2019 伯苓班数分 II 期末压轴)

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的上凸函数，$f(0)=1$. 证明：

$$\frac{1}{3}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{12}.$$

证明 取 $g(x)=f(x)+x-1$，从而任意 $t\in[0,1]$，由 $f(x)$ 上凸，从而 $f(tx+(1-t)y)\ge tf(x)+(1-t)f(y)$，也即有 $g(tx+(1-t)y)\ge tg(x)+(1-t)g(y)$，故 $g(x)$ 也是 $[0,1]$ 上的上凸函数，且 $g(0)=0$，又注意到 $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\int_0^1x(1-x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{12}$，从而只需证明

$$\frac{1}{3}\int_0^1g(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{2}\int_0^1xg(x)\mathrm{d}x.$$

又由 $g(x)$ 上凸，从而任意 $t\in[0,1]$，有 $g(tx)\ge tg(x)+(1-t)g(0)=tg(x)$，从而对任意 $0\le x\le y\le1$，有 $g(x)\ge\dfrac{x}{y}g(y)$ 也即 $yg(x)-xg(y)\ge0$，进而我们有 $(y-x)(yg(x)-xg(y))\ge0$. 又注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\int_0^1g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1xg(x)\mathrm{d}x\\=&\int_0^1y^2\mathrm{d}y\int_0^1g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1y\mathrm{d}y\int_0^1xg(x)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(y^2g(x)+x^2g(y)-xy\cdot g(x)-xy\cdot g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(y-x)(yg(x)-xg(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge0,\end{aligned}$$

综上我们即证明了原不等式.

笔记 这种证法比较取巧，首先是根据特殊解简化条件，进而对凸函数类型的积分不等式都可以适当变形后转化成二重积分，不过这里转变不同的视角会有不同的证法，见下方的注.

注 3.6.1: 另外两种证法的思路

若这里视 $\dfrac{1}{12}$ 为 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}x$ 的积分话，就等价于证明 $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}x\right)(f(x)-1)$ 的积分非负，从而自然的会去想到分段放缩，而容易发现 $f(x)-1=f(x)-f(0)$，从而转化为在 $\dfrac{2}{3}$ 处的割线，进而证明；

若这里有一种奇思妙想，发现下面这样的一个事实

$$\frac{1}{3}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1t^2f(t^3)\mathrm{d}t,\quad\frac{1}{2}\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1t^3f(t^2)\mathrm{d}t,$$

则可以进一步借助凸函数的 $tf(t^2)+(1-t)f(0)\le f(t^3)$ 则亦可以实现证明，也是非常巧妙的方法.

命题 3.16 (20 级伯苓班选拔模拟考试推广)

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微，$f(0)=0$，$p\geq 0$，$q\geq 1$，证明：

$$\int_0^a |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leq \frac{qa^p}{p+q}\int_0^a |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x.$$

证明 考虑 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，$G(x)\int_0^x |f'(t)|^q\mathrm{d}t$，从而由 Holder 不等式与绝对不等式有

$$|f(x)|^p=\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|^p\leq\left(\int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^p\leq\left[\left(\int_0^x 1\mathrm{d}t\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^x |f'(x)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p=x^{\frac{p(q-1)}{q}}G(x)^{\frac{p}{q}},$$

从而我们结合 $G'(x)=|f'(x)|^q$，则我们有

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x&\leq\int_0^a x^{\frac{p(q-1)}{q}}(G(x))^{\frac{p}{q}}G'(x)\mathrm{d}x=\frac{q}{p+q}\int_0^a x^{\frac{p(q-1)}{q}}\mathrm{d}\left(G(x)^{\frac{p+q}{q}}\right)\\&=\frac{q}{p+q}x^{\frac{p(q-1)}{q}}G(x)^{\frac{p+q}{q}}\Big|_0^a-\int_0^a x^{\frac{p(q-1)-q}{q}}G(x)^{\frac{p+q}{q}}\mathrm{d}x\leq\frac{q}{p+q}a^{\frac{p(q-1)}{q}}G(a)^{\frac{p+q}{q}},\end{aligned}$$

而进一步由 Holder 不等式即可得到

$$G(a)=\int_0^a |f'(x)|^q\mathrm{d}x\leq\left(\int_0^a 1\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+q}}\left(\int_0^a |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p+q}}=a^{\frac{p}{p+q}}\left(\int_0^a |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p+q}},$$

代入上式即可完成证明，综上原题得证.

笔记 若这个题进一步添加条件，如增加 $f(0)=f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a)=0$，其中 $a_k=\dfrac{k}{n}a(0\leq k\leq a)$，则可以将不等式加细为 (B 组题的进一步推广)

$$\int_0^a |f(x)|^p|f'(x)|^q\mathrm{d}x\leq\frac{q}{p+q}\cdot\left(\frac{a}{2n}\right)^p\int_0^a |f'(x)|^{p+q}\mathrm{d}x,$$

这个进一步的推广只需要在零点之间取中点两次运用题目条件即可，没有本质的创新.

命题 3.17 (积分数值的巧用)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均在 $[0,1]$ 上可积，且振幅分别为 Ω_1，Ω_2，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{\Omega_1\cdot\Omega_2}{4}.$$

证明 首先看到积分的乘积，就无脑联想到转化成二重积分

$$\begin{aligned}&2\left(\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\\=&\iint_{[0,1]^2}(f(x)g(x)+f(y)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{[0,1]^2}(f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而由 Cauchy 不等式，我们即有

$$2\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|\leq\sqrt{\iint_{[0,1]^2}(f(x)-f(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\cdot\sqrt{\iint_{[0,1]^2}(g(x)-g(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

从而我们将其分离成了两部分单独研究，对其中一部分有

$$\iint_{[0,1]^2}(f(x)-f(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left[\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]:=2\left(\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-A^2\right),$$

进而设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上上确界为 M，下确界为 m，则 $M-m=\Omega_1$，从而 $\boldsymbol{(f(x)-m)(M-f(x))\geq 0}$，则我们可以借助这个不等式得到反向估计 $\int_0^1(f(x)-m)(M-f(x))\mathrm{d}x\geq 0$，进而

$$\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-A^2\leq(m+M)A-mM-A^2\leq\frac{(M-m)^2}{4}=\frac{\Omega_1^2}{4},$$

从而代入上式即可完成证明.

笔记 对于这种涉及 Cauchy 不等式的反向估计，就需要结合实际的最大最小值进行区间放缩，这个题容易在重积分那里放缩得到 $\frac{\Omega_1\cdot\Omega_2}{2}$，但这就放缩幅度过大，没有区分 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的区别.

命题 3.18 (Riemann 引理推广的推广)

设周期为 T 的连续函数 $f(x)$ 值域为 $[c,d]$，二元函数 $F\in C([a,b]\times[c,d])$，证明：

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b F(x,f(px))\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^T F(x,f(y))\mathrm{d}y.$$

证明 不失一般性，我们假设 $[a,b]=[0,1]$(一般情况利用区间伸缩与平移即可证明.)

注意到，设 $n=\left[\frac{p}{T}\right]$，从而我们通过换元进行区间划分有

$$\int_0^1 F(x,f(px))\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^p F\left(\frac{x}{p},f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T}F\left(\frac{x}{p},f(x)\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{p}\int_{nT}^{p}F\left(\frac{x}{p},f(x)\right)\mathrm{d}x,$$

而又对最后一项成立估计，其中由连续性 M 是 $|F|$ 的最大值，

$$\left|\frac{1}{p}\int_{nT}^{p}F\left(\frac{x}{p},f(x)\right)\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{p}\int_{nT}^{p}\left|F\left(\frac{x}{p},f(x)\right)\right|\mathrm{d}x\le\frac{p-nT}{p}\cdot M\to 0,$$

进一步地，我们可以对前一大项转化成二重积分的形式来与右侧结果靠近

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T}F\left(\frac{x}{p},f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^T F\left(\frac{x+kT}{p},f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T F\left(\frac{y+kT}{p},f(y)\right)\mathrm{d}y,$$

进而我们可以对原题所给的式子两端进行做差估计，而首先右侧可以进行区间划分为

$$\frac{1}{T}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^T F(x,f(y))\mathrm{d}y=\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T F\left(x,f(y)\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{T}\int_{\frac{nT}{p}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^T F\left(x,f(y)\right)\mathrm{d}y,$$

其中不难估计出红色部分在 $p\to+\infty$ 时会趋向于 0，从而结合 F 在有界闭集上连续，进而一致连续，从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 δ 使得任意 $|X_1-X_2|<\delta$，有 $|F(X_1)-F(X_2)|<\varepsilon$，则当 $p>\delta T$ 时，则有估计：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T F\left(\frac{y+kT}{p},f(y)\right)\mathrm{d}y-\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T F\left(x,f(y)\right)\mathrm{d}y\right|\\
=&\left|\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T\left[F\left(\frac{y+kT}{p},f(y)\right)-F(x,f(y))\right]\mathrm{d}y\right|\\
\le&\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T\left|F\left(\frac{y+kT}{p},f(y)\right)-F(x,f(y))\right|\mathrm{d}y\\
\le&\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{p}T}^{\frac{k+1}{p}T}\mathrm{d}x\int_0^T\varepsilon\mathrm{d}y=\varepsilon\cdot T\cdot\frac{T}{p}\cdot n\cdot\frac{1}{T}=\frac{nT}{p}\varepsilon<\varepsilon.
\end{aligned}$$

从而综合上述若干估计，可知原题得到证明，即证 Riemann 引理 (推广)[2].

笔记 虽然说是推广，但唯一有区别的点就在于化定积分为重积分的手段与原来的利用不变号性积分中值定理上的创新，从而可以证明了更一般的结论，那么本题的 F 与 f 均限制了连续，能否进一步减弱为可积？留作思考.

命题 3.19 (一道非常困难的问题)

证明：对任意正整数 n，方程

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t=n$$

在区间 $(n,2n)$ 上有唯一实根.

笔记 唯一性利用单调性说明是 trivial 的，而在 $2n$ 处的放缩则需要借助积分余项的 Taylor 展开，详细解答可参看军军补充资料例 22.

下面是两个类似的问题，难度比较大

命题 3.20 (经典考研试题)

设 f 在 $[a,b]$ 上可导，f' 单调递增，且 $f'(x)\geq m>0$，对任意 $x\in[a,b]$，证明：
$$\left|\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{2}{m}.$$

证明 由 $f'(x)$ 单调递增且恒大于 0 可知 $\dfrac{1}{f'(x)}$ 单调递减且恒正，从而由积分第二中值定理
$$\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{f'(x)}\cdot\left(f'(x)\cos f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{f'(a)}\cdot\int_a^{\xi}\mathrm{d}\left(\sin f(x)\right),$$
从而我们有
$$\left|\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{|\sin f(\xi)-\sin f(a)|}{f'(a)}\leq\frac{2}{m},$$
综上我们比较轻松地完成了本题的证明.

命题 3.21 (另一个版本)

设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微，且满足 $f'(x)\geq m>0$，$|f(x)|\leq\dfrac{\pi}{2}$，对任意 $x\in[a,b]$，证明：
$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{2}{m}.$$

证明 由 $f'(x)>0$ 可知 $f(x)$ 单调递增，从而存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，从而我们做换元，则有 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{f'(x)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{f'(f^{-1}(y))}$，从而我们有 $\displaystyle\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y$.

而又结合 $y=f(x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，从而可知 $\sin y$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上至多变号两次，从而：

Case I. 若不变号，从而可直接利用积分第一中值定理，得到
$$\left|\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y\right|=\left|\frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}\int_{f(a)}^{f(b)}\sin y\mathrm{d}y\right|\leq\frac{|\cos f(b)-\cos f(a)|}{m}\leq\frac{2}{m}.$$

Case II. 若恰好变号一次，设在 $f(x_0)$ 处变号，则有 $f(x_0)=0$，且 $\cos f(a),\cos f(b)>0$，从而
$$\begin{aligned}\left|\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y\right|&=\left|\int_{f(a)}^{f(x_0)}+\int_{f(x_0)}^{f(b)}\right|\\&=\left|\frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}\int_{f(a)}^{f(x_0)}\sin y\mathrm{d}y\right|+\left|\frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}\int_{f(x_0)}^{f(b)}\sin y\mathrm{d}y\right|\\&\leq\frac{|\cos f(x_0)-\cos f(a)|+|\cos f(b)-\cos f(x_0)|}{m}\\&=\frac{2-\cos f(a)-\cos f(b)}{m}\leq\frac{2}{m},\end{aligned}$$
综上所述，我们证明了原题中的不等式.

笔记 这两题中暗含的取反函数的手法还是很有味道的，特别的，反函数求导也是一个难点，从而这两题价值也比较高. 其中的细节值得揣摩品味.

命题 3.22 (第八届全国大学生数学竞赛初赛,T4)

设 $f_0(x)$，$f_1(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的正连续函数，满足 $\displaystyle\int_0^1f_0(x)\mathrm{d}x\leq\int_0^1f_1(x)\mathrm{d}x$，设 $f_{n+1}(x)=\dfrac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)}$，$n=1,2,\cdots$. 证明：数列 $\displaystyle a_n=\int_0^1f_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 我们先用数学归纳法证明 a_n 单调递增，命题对 $n=1$ 显然成立，下假设对 $1,\cdots,n$ 都成立，则有

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1(f_{n+1}-f_n)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f_n(f_n-f_{n-1})}{f_n+f_{n-1}}\mathrm{d}x,$$

从而，我们令 $A=\int_0^1\frac{f_n(f_n-f_{n-1})}{f_n+f_{n-1}}\mathrm{d}x$，$B=\int_0^1\frac{f_{n-1}(f_n-f_{n-1})}{f_n+f_{n-1}}\mathrm{d}x$，从而注意到

$$A+B=\int_0^1(f_n-f_{n-1})\mathrm{d}x\geq 0,\quad A-B=\int_0^1\frac{(f_n-f_{n-1})^2}{f_n+f_{n-1}}\mathrm{d}x\geq 0,$$

因此我们有 $A=\frac{(A+B)+(A-B)}{2}\geq 0$，因此 $a_{n+1}\geq a_n$，故可知 $\{a_n\}$ 单调递增.

进一步对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，我们注意到 $\frac{f_{n+1}^2(x)}{f_n(x)}\leq\frac{f_n^2(x)}{f_{n-1}(x)}$ 等价于

$$\frac{4f_n^4}{(f_n+f_{n-1})^2}\leq\frac{f_n^3}{f_{n-1}}\Longleftrightarrow(f_n-f_{n-1})^2\geq 0$$

显然成立，因此我们有对任意 $x\in[0,1]$，$f_{n+1}^2(x)/f_n(x)$ 单调递减，从而存在 M 使得恒有 $f_n^2\leq Mf_{n-1}$，从而 $f_{n+1}\leq 2M$，进而 $a_n\leq 2M$，从而 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界，故可知其收敛，即证.

命题 3.23 (改编自 1977，Putnam B1)

给定正整数 $n\in\mathbb{N}^*$，对任意 $x\in(0,1)$，定义

$$\mathcal{S}_x=\left\{1\leq k\leq n\,\middle|\,\left\{\frac{n}{k}\right\}>x\right\},\quad \mathcal{M}_x=\sum_{k\in\mathcal{S}_x}\left\{\frac{n}{k}\right\},$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示实数 x 的小数部分，证明存在充分大的正整数 n 使得成立：

(1)$\mathcal{M}_{\frac{1}{2}}>\frac{n}{3}$；　　(2)$\mathcal{M}_{\frac{1}{q}}+\mathcal{M}_{\frac{2}{q}}+\cdots+\mathcal{M}_{\frac{q-1}{q}}<q(1-\gamma)n$，这里 $q\in\mathbb{N}^*$，γ 表示 Euler 常数.

证明 我们只需注意到

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{q}}+\mathcal{M}_{\frac{2}{q}}+\cdots+\mathcal{M}_{\frac{q-1}{q}}=\sum_{k=1}^n\left(\left[\frac{qn}{k}\right]-q\left[\frac{n}{k}\right]\right),$$

以及以下这个极限对应的积分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\left[\frac{qn}{k}\right]-q\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\int_0^1\left(\left[\frac{q}{x}\right]-q\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=q\ln q-q\sum_{k=2}^q\frac{1}{k},$$

从而进行适当的放缩估计即可得到原题之证明.

第 4 章 点集拓扑基础

4.1 区分基本概念

对于 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$，以及给定的点集 A，我们研究任一点 P 相对于 A 的位置情况，从而可以衍生出如下内点，外点，边界点的概念 (注意，这里的" 点" 均是 P 的领域相对于 A 的)

- 内点

  对于 P 而言，如果存在 P 的一个领域使得 $B(P)$ 完全包含在 A 中，那么我们称 P 是 A 的一个内点.

  内点的存在性，直观上看一定程度反映了 A 具有**连续不断的**感觉，因为" 离散" 的 A 可以包含一个" 连续" 的 $B(P)$.
- 外点

  定义上，我们是说存在 $B(P)$ 完全包含于 A^c，即 P 是 A^c 的一个内点.
- 边界点

  我们现在仍然考虑 $B(P)$，由于 $A\bigcup A^c=\mathbb{R}^n$，从而直观上平移 $B(P)$，它要么完全在 A 中，要么完全在 A^c 中，但还有可能，如果 P 在一个 A 与 A^c 的一个" 边界" 上时，其领域不可能被完全包含，从而我们就把这种对任意 $B(P)$，但 $B(P)\bigcap A\neq\emptyset$，且 $B(P)\bigcap A^c\neq\emptyset$ 的点 P 叫做边界点.

  因此我们可以做一个断言：**$\mathbb{R}^n$ 中一个点，一定是 A 的内点或者外点或者边界点**.
- 内部

  A 的所有内点组成的集合，记为 A°.
- 外部

  A 的所有外点组成的集合，记为 $(A^c)^\circ$.
- 边界

  A 的所有边界点组成的集合，记为 ∂A.

  由上述论断我们容易看到

$$\mathbb{R}^n=A^\circ\bigcup(A^c)^\circ\bigcup\partial A$$

  即我们关于集合 A，我们对 $\mathbb{R}^n$ 进行了一个分划.

下面我们进一步，把点列的极限引入我们对 P 与 A 相对关系的讨论中.

- 触点

  如果存在点列 $\{X_m\}\subset A$ 且使得 $\lim\limits_{m\to\infty}X_m=P$，则称 P 为触点.
- 聚点

  如果存在点列 $\{X_m\}\subset A$，$X_m\neq P$，且使得 $\lim\limits_{m\to\infty}X_m=P$，则称 P 为聚点.
- 闭包

  我们把所有触点构成的集合成为 A 的闭包，记作 $\overline{A}$.
- 导集

  我们把所有聚点构成的集合成为 A 的导集，记作 A'.

开集和闭集的性质

- 有限个开集的交是开集，任意多个开集的并是开集.
- 有限个闭集的并是闭集，任意多个闭集的交是闭集.
- $\mathbb{R}^n$ 中的列闭性与闭性等价.
- 集合 A 的导集 A' 是闭集

  证明 反证法，若不然，即存在 $X'\notin A'$，但任意 $B_r(X)\bigcap A'\neq\emptyset$，从而对任意 r，存在 $X_r\in A'$，$|X_r-X|<\dfrac{r}{2}$，而存在 $X_r'\in A$ 使得 $|X_r-X_r'|<\dfrac{r}{2}$，从而 $|X-X_r'|<r$，从而有 $X'\in A'$ 矛盾！故 A' 为闭集.

紧性

- 列紧性等价于有界闭

  核心在于利用 Weierestrass 定理，利用收敛子列.
- 紧集的闭子集仍为紧集

  证明 难点在于如何抓住 A 为闭集的性质，联想开覆盖，这里应该开集更好用.
  我们考虑 A 的开覆盖 $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$，从而 $A^c\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开覆盖，自然为 K 的开覆盖，从而存在有限子覆盖，去掉 A^c 即证.
- 有界闭集一定是紧集

  核心在于利用紧集的闭子集仍为紧集，从而考虑有界闭集可以被一个 $r-$ 方格包含，从而可以证明.
- 紧集一定是列紧的

  证明 反证法，我们可以考虑存在一个点列，其任意子列均不收敛于 A 中任一点，从而任意 $X\in A$，$B_r(X)$ 只有 A 中有限多项，从而考虑 $B(X)$ 为 A 的一个开覆盖，从而存在有限个领域 $A\subset \bigcup\limits_{1\leq i\leq n} B(X_i)$，说明 A 只含这个点列的有限多项，从而矛盾！

4.2 距离函数的一个应用例子——第十章补充资料思考题

命题 4.1

设 A,B 为 $\mathbb{R}^n$ 上不相交的闭集，证明：存在开集 U,V 使得

$$A\subseteq U, B\subseteq V, U\bigcap V=\varnothing.$$

证明 注意到 A,B 为不交闭集，从而有

Case I.

若 $d(A,B)>0$，从而考虑构造：

$$U=\bigcup_{X\in A} B\left(X,\frac{d(A,B)}{3}\right), V=\bigcup_{Y\in B} B\left(Y,\frac{d(A,B)}{3}\right)$$

则显然符合条件；

Case II.

若 $d(A,B)=0$，这种情况就比较复杂，较难以直接刻画集合间非常狭窄的"缝隙"，因此我们需要一个新的构造.

我们熟悉两个结论：

(a) 点到集合的距离函数 $d(X,A)$ 是连续函数；

(b) 设 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数，则对任意 $c\in\mathbb{R}$，集合

$$\{X|f(X)>c\}\{X|f(X)<c\}$$

均为开集.

从而据此我们构造函数 $f(X)=\dfrac{d(X,A)}{d(X,A)+d(X,B)}$，则易见 $f(A)=0$，$f(B)=1$，从而考虑构造

$$U=\left\{X\middle|f(X)<\frac{1}{2}\right\}, V=\left\{X\middle|f(X)>\frac{1}{2}\right\},$$

即是符合题意的构造.

事实上利用第二个结论也可以解决 Case I，但 Case I 的想法也非常经典且自然，其构造更一般地可以适用于两个闭集，至少有一个有界的情形上.

4.3 难题选解

10.1 例题 13 另证

证明 我们类比 Lebesgue 方法：

任意 $P \in S^\circ$，$Q \in (S^c)^\circ$，则熟知 S°，$(S^c)^\circ$，∂S 是 $\mathbb{R}^n$ 的不交并，从而我们考虑集合：

$$T = \{t | f(t) \in S^\circ (0 < t < 1)\},$$

显见这个集合存在上确界，不妨设为 $\xi = \sup T$，从而我们下面讨论 $f(\xi)$ 的归属.

若 $f(\xi) \in S^\circ$，则存在 $\delta > 0$，使得 $B(f(\xi), \delta) \subset S^\circ$，从而有当 $\varepsilon < \dfrac{\delta}{|P-Q|}$ 时，$|f(\xi+\varepsilon) - f(\xi)| = \varepsilon|P-Q| < \delta$，故 $\xi + \varepsilon \in T$，这与 ξ 为上确界矛盾！

若 $f(\xi) \in (S^c)^\circ$，则同上述论证可知存在 ε_0 使得 $f(\xi \pm \varepsilon_0) \in (S^c)^\circ$，也即任意 $\varepsilon < \varepsilon_0$，不存在 $t \in T$ 使得 $t > \xi - \varepsilon$，也与上确界的定义相矛盾！

综上，我们可知 $\xi \in \partial S$，即证.

Remark.

原解答采用了闭区间套的方式，与这个做法大同小异，都是回归了第六章实数理论的相关手法. 特别地，本题的一维情形就出现在第六章中.

10.1 例题 6 思考题

证明 我们下证 $d(A) = d(\partial A)$，一方面由例题 6 知 $d(A) = d(\overline{A})$，且 $\partial A \subset \overline{A}$，故有 $d(\partial A) \leq d(\overline{A}) = d(A)$.

而另一方面 $\overline{A} = A^\circ \bigcup \partial A$，且 $A^\circ \bigcap \partial A = \varnothing$，从而可知

$$d(\overline{A}) = \max\left\{d(A^\circ), d(\partial A), \sup_{\boldsymbol{x} \in A^\circ, \boldsymbol{y} \in \partial A} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|\right\}$$

注意到任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A^\circ$，考虑直线 $\{\boldsymbol{x}_t | \boldsymbol{x}_t = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 (t \in \mathbb{R})\}$，从而由 A 为有界集，一定存在 t_1, t_2，使得任意 $t > t_1 > 1$ 或 $t < t_2 < 0$ 均有点 $\boldsymbol{x}_t \in (A^c)^\circ$(严格论述可以借助闭方体来反证，而 $t_1 > 1$ 与 $t_2 < 0$ 是利用了由于是内点，从而考虑线段，存在 δ，线段向两端延伸还在 A° 中)，故由例题 13 可知点 $\boldsymbol{x}_{\inf t_1}, \boldsymbol{x}_{\sup t_2}$ 均在 ∂A 上，此时则有

$$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \leq |\inf t_1 - \sup t_2||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_{\inf t_1} - \boldsymbol{x}_{\sup t_2}| \leq d(\partial A)$$

则由 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 的任意性可知 $d(A^\circ) \leq d(\partial A)$；

另一方面，对任意 $\boldsymbol{x}_3 \in A^\circ, \boldsymbol{x}_4 \in \partial A$，考虑射线 $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_4\boldsymbol{x}_3}$ 同理会与 ∂A 相交且存在边界上某点，射线在此点之后全部在 A 的外部，从而可知距离小于边界的直径，即 $\sup\limits_{\boldsymbol{x} \in A^\circ, \boldsymbol{y} \in \partial A} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq d(\partial A)$，故有 $d(\overline{A}) \leq d(\partial A)$.

综上结合两方面我们有 $d(A) = d(\overline{A}) = d(\partial A)$，即证.

10.3 补充资料思考题

命题 4.2

(1) 若所有连续函数都有界，则 D 为紧集；

证明 先考虑 D 上的连续函数 $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$，从而由 $f(\boldsymbol{x})$ 有界知 D 有界；

再反证若 D 不为闭集，则存在 $\boldsymbol{x}_0 \in D^c$ 且 $\boldsymbol{x}_0$ 为 D 的一个聚点，从而考虑连续函数 $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}$，从而考虑极限为 $\{\boldsymbol{x}_0\}$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 可知函数 g 无界，矛盾！

故 D 为有界闭集，即紧集.

命题 4.3

(2) 若所有有界连续函数都有最大值和最小值，则 D 是紧集.

证明 先考虑 D 上的有界连续函数 $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|+1}$，从而若 D 无界，则可知 $f(\boldsymbol{x}) \to 0$，则无最小值，矛盾！故有界. 类似的，若 D 不为闭集，则存在收敛点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}_0$，但 $\boldsymbol{x}_0 \notin D$，从而考虑有界连续函数 $g(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$，

故可知有下确界 0，无最小值.

Remark.

由证明过程我们容易发现，可以把条件削弱为仅有最小值即可.

连通集相关的一个思考题

命题 4.4

设 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，其中 Λ 为指标集，都是 $\mathbb{R}^n$ 上的连通集，若 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\varnothing$，则有 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 连通.

证明 反证法，若 $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 不为连通集，则存在非空开集 O_1，O_2 使得 $\mathcal{A}\subseteq O_1\bigcup O_2$，且 $O_1\bigcap O_2=\varnothing$，从而我们可以构造函数 $f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}\in O_1\bigcap\mathcal{A}\\ 1 & \boldsymbol{x}\in O_2\bigcap\mathcal{A}\end{cases}$，则容易验证这是连续函数.

进一步我们可以证明，一个集合不连通等价于存在集合到 $\{0,1\}$ 的一个连续满射，从而由任意 $\lambda\in\Lambda$ 有 A_λ 为连通集，故有 $f(A_\lambda)\equiv\varepsilon_\lambda(\varepsilon_\lambda\in\{0,1\})$，而 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\varnothing$，从而设 $\boldsymbol{x}_0\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，则 $f(\boldsymbol{x}_0)=0$ 或 1，这表明 $f(\boldsymbol{x})\equiv f(\boldsymbol{x}_0)$，矛盾！即证.

连通集相关的又一个思考题

命题 4.5

设 $A\subseteq\mathbb{R}^n$，如果对于 $\mathbb{R}^n$ 的任何非空开子集 U，均有 $A\bigcap U\neq\varnothing$，则称 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密子集. 设 A_m 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密开子集，$m=1,2,\cdots$. 令

$$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m,$$

证明：A 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

(如何利用连通性处理稠密性？)

4.4 点集拓扑基础判断题思路整理

问题 1

证明 [正确] 注意到 A 为开集，从而有 $\partial A\bigcap A=\varnothing$，因此任意 $\boldsymbol{x}\in\partial A$，均有任意 $B(\boldsymbol{x})\bigcap A\neq\varnothing$，也即任意 $\delta>0$，存在 $\boldsymbol{x}_\delta\in B^\circ(\boldsymbol{x},\delta)\bigcap A$，从而 $\boldsymbol{x}$ 为 A 的聚点，也即 $\partial A\subset A'$.

Remark.

一个自然会考虑的问题就是上述结论能否更强？比如会不会有 $\partial A=A'$? 但有反例告诉我们这并不一定成立，不妨考虑一个去掉直径的一个开圆盘.

问题 2

证明 [错误] 我们只需考虑 $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$，即整个二维平面挖去一个点，则 ∂A 即这一个单点，从而为有限集.

Remark.

从这个反例的构造中我们可以得到一个有趣的事实，一个开集的边界可以有任意给定数个点.

问题 3

证明 [错误] 我们考虑反向构造一个不符合条件的 A: 构造 $\mathcal{A}_0=\{0\}$, $\mathcal{A}_1=\left\{\frac{1}{n_1}\middle|n_1\in\mathbb{N}^*\right\}$, $\mathcal{A}_2=\left\{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2n_1^2}\middle|n_1,n_2\in\mathbb{N}^*\right\}$,

$\mathcal{A}_3=\left\{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2n_1^2}+\frac{1}{n_3n_2^2n_1^2}\middle|n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}^*\right\}$，一般地

$$\mathcal{A}_k=\left\{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2n_1^2}+\frac{1}{n_3n_2^2n_1^2}+\cdots+\frac{1}{n_kn_{k-1}^2\cdots n_1^2}\middle|n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k\in\mathbb{N}^*\right\},$$

从而我们容易得到 $\mathcal{A}_k' = \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{A}_i$，进一步有 $\mathcal{A}_k^{(m)'} = \bigcup_{i=1}^{k-m} \mathcal{A}_i$，从而我们考虑取

$$A = \mathcal{A}_\infty = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2 n_1^2} + \frac{1}{n_3 n_2^2 n_1^2} + \cdots \middle| n_1, n_2, n_3 \cdots \in \mathbb{N}^* \right\}$$

则可知每次 $A_{k+1} = (A_k)' \subset A_k$(真包含)，从而不存在正整数 k 使得 $A_{k+1} = A_k$，即是一个反例.

Remark.

这个无穷加子列的反例比较好想，但表述起来显得很诡异，特别是最后集合列取极限，这样的集合是否有意义？但直观分析下来这个反例足以触及问题核心.

问题 4

证明 [正确] 我们熟知这样两个事实 ∂A 为闭集，且对任意集合 $B \in \mathbb{R}^n$，有 $\overline{B} = B^\circ \bigcup \partial B$，且这个分划是不交的，因此我们有如下推导:

注意到 $A_2 = \partial A$ 为闭集，从而有 $A_2 = A_2^\circ \bigcup \partial A_2 = A_2^\circ \bigcup A_3$，且 $A_3 \bigcap A_2^\circ = \varnothing$，进而 $A_3^\circ \bigcap A_2^\circ = \varnothing$.

而另一方面，由 $A_3 \subseteq A_2$，从而有 $A_3^\circ \subseteq A_2^\circ$，故结合上面的论断，我们有 $A_3^\circ = \varnothing$，即有 $A_3 = A_3^\circ \bigcup A_4 = A_4$，对任意集合 A，均有 $k = 3$，使得 $A_3 = A_4$(事实上此后都不会再改变)，即证.

Remark.

巧妙利用集合之间的运算关系，简洁利落的解决了问题，干净漂亮.

问题 5

证明 [正确] 若 B 不为连通集，即存在 $\mathbb{R}^n$ 上的开集 O_1, O_2，使得 $B \subseteq O_1 \bigcup O_2$ 且 $O_1 \bigcap O_2 = \varnothing$. 进一步设 $U = B \bigcap O_1$，$V = B \bigcap O_2$，从而有 $A \subseteq B = U \bigcup V$.

从而有 $A \subseteq O_1 \bigcup O_2$，故 $A = (A \bigcap O_1) \bigcup (A \bigcap O_2)$，而 A 连通，故不妨设 $A \bigcap O_2 = \varnothing$，从而 $A \subseteq U$，故有 $U \bigcup V = B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{U}$，从而有 $V \subseteq U' \setminus U$，而 $V \bigcap U = \varnothing$，且 V 相对 B 开，故任意 $\boldsymbol{x} \in V$，存在 $B(\boldsymbol{x}) \bigcap U = \varnothing$，矛盾！故 B 为连通集.

问题 6

证明 [错误] 构造 $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2}$，从而一方面对任意 λx，有

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \lambda^3) x^3}{x^2 (x + \lambda^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \lambda^3}{\lambda^2} x = 0,$$

故各个方向极限均为 0，但是注意到:

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2} = 0, \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2} = 1,$$

从而两个累次极限存在但不相等，故为一个反例.

问题 7

证明 [正确] 我们考虑任一点 $\boldsymbol{x} \in D_1 \bigcup D_2$，做如下讨论:

若 $\boldsymbol{x}_0 \in U_1$ 且 $\boldsymbol{x} \notin U_2$，则由 U_1, U_2 为闭集知，存在 $\delta > 0$，$B(\boldsymbol{x_0}, \delta) \subseteq (U_2)^c$ 即 $B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigcap U_2 = \varnothing$，从而由 f 在 U_1 上连续，可知任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta' < \delta$，对任意 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta'$，有 $\boldsymbol{x} \in U_1$，故 $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$，即此时 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续;

若 $\boldsymbol{x}_0 \in U_1 \bigcap U_2$，则我们可知 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 在 U_1 和 U_2 处有相同的值，从而易见在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

综上即证，f 在 $U_1 \bigcup U_2$ 上连续.

Remark.

本题的闭集是必要的，若仅减弱一个不为闭集，则容易举出反例，反例的核心在于在改变不为闭集的集合一个聚点处的取值.

问题 8

证明 [错误] 构造 $\mathbb{R}^2$ 上的道路连通开集 $C_1 = \left\{ (x, y) \middle| x > 0, y > \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \right\}$，$C_2 = \left\{ (x, y) \middle| x < 0, y < -\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \right\}$，如图 $1C_1$ 为红

色区域，C_2 为橙色区域，则 $D_1=\overline{C_1}$，$D_2=\overline{C_2}$，则 $D_1\bigcap D_2=\{(0,0)\}$，从而我们考虑函数 $f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}x & \boldsymbol{x}\in D_1\\ -x & \boldsymbol{x}\in D_2\end{cases}$，如图 2 中 xOy 平面上方为函数图像，则容易证明其是一个反例.

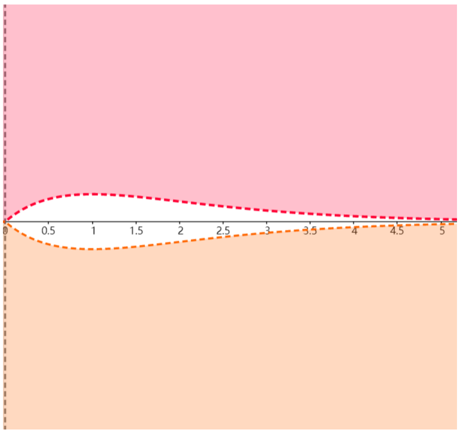


图 4.1: 区域 C_1 与 C_2

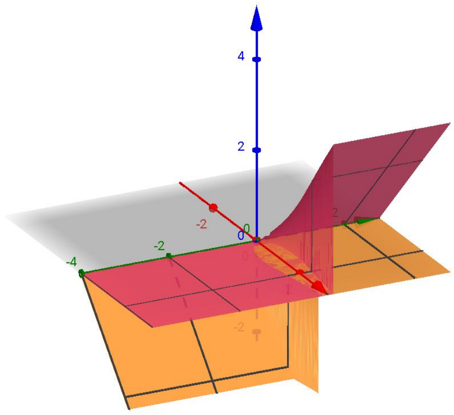


图 4.2: 反例函数 $f(\boldsymbol{x})$

Remark.

构造的核心在于尽可能的使两个区域的交集尽可能的小，比如在本题的构造中，交集仅为原点一个点，进一步的希望不一致连续就需要两个区域里有一些充分靠近的点，但实际上尽管充分靠近，但并不相交，因此函数值毫无联系，就可以轻松给出一个构造.

问题 9

证明 [正确] 先证明必要性：若 g 的各个分量 f_i 在 D 上 Lipstich 连续，从而存在正数 $L_i(1\le i\le m)$ 使得任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$，有 $|f_i(\boldsymbol{x}_1)-f_i(\boldsymbol{x}_2)|<L_i|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$，故对 $g(f_1,\cdots,f_m)$，存在 $L=\sqrt{L_1^2+\cdots+L_m^2}$，使得：

$$|g(\boldsymbol{x}_1)-g(\boldsymbol{x}_2)|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x}_1)-f_i(\boldsymbol{x}_2))^2}\le L|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|,$$

再证明充分性：对任意 f_i，若 g 满足 Lipstich 连续，即存在 L，对任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$，则有：

$$|f_i(\boldsymbol{x}_1)-f_i(\boldsymbol{x}_2)|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x}_1)-f_i(\boldsymbol{x}_2))^2}=|g(\boldsymbol{x}_1)-g(\boldsymbol{x}_2)|\le L|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|,$$

从而每个分量也满足 Lipstich 连续，故综上本题正确.

问题 10

证明 [正确] 首先注意到任意 $\boldsymbol{x}_1\ne\boldsymbol{x}_2$，有 $|F(\boldsymbol{x}_1)-F(\boldsymbol{x}_2)|=|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|\ne 0$，从而 $F(\boldsymbol{x}_1)\ne F(\boldsymbol{x}_2)$，故 F 为单射；

下证 F 是满射：

我们下面考虑点列 $\{\boldsymbol{y}_k\}$，其中 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}_{k+1}=F(\boldsymbol{y}_k)$，我们下面研究这个点列的性质.

由 $F(K)$ 为有界闭集，从而由 Bolozano-Weierstrass 定理可知存在收敛点列 $\{\boldsymbol{y}_{k_t}\}$，从而任意 $\varepsilon>0$，由 Cauchy 收敛原理，知存在 t 使得 $\left|\boldsymbol{y}_{k_{y+1}}-\boldsymbol{y}_{k_t}\right|<\varepsilon$，也即

$$\varepsilon>\left|\boldsymbol{y}_{k_{t+1}}-\boldsymbol{y}_{k_t}\right|=|F(\boldsymbol{y}_{k_{t+1}-1})-F(\boldsymbol{y}_{k_t-1})|=|\boldsymbol{y}_{k_{t+1}-1}-\boldsymbol{y}_{k_t-1}|=\cdots=|\boldsymbol{y}_{k_{t+1}-k_t}-\boldsymbol{y}|,$$

从而取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，则存在 $\boldsymbol{y}_{k_{t_n+1}-k_{t_n}-1}$ 使得 $|F(\boldsymbol{y}_{k_{t_n+1}-k_{t_n}-1})-\boldsymbol{y}|<\dfrac{1}{n}$，从而其收敛于 $\boldsymbol{y}$，不妨记为 $\{\boldsymbol{x}_k\}=\{\boldsymbol{y}_{k_{t_n+1}-k_{t_n}-1}\}$，由 $k_{t_n+1}>k_{t_n}$ 知这个数列是存在的.

又注意到 $|F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y})|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，从而 F 在 K 上连续，且 K 为闭集，则 $F(K)$ 也为闭集，故由 $\{F(\boldsymbol{x}_k)\}$ 收敛可知，$\boldsymbol{y}\in F(K)$，从而存在 $\boldsymbol{x}_0\in K$ 使得 $F(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}$，故有 $\boldsymbol{y}\in K$，故 F 为满射，即证.

Remark.

本题的难点在于证明满射上，但事实上当我们固定一个点考虑时，是比较自然的会想到考虑迭代产生的点列，剩下利用很好的距离等式的传递性即可研究其性质.

进一步我们注意到，我们可以将条件减弱为映射 F 满足 $F: K \to K$，且 $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \geq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. 在这个新问题的背景下，一个自然的问题是，大于等于号是否一定蕴含等号？留作思考.

4.5 难题选解 (II)

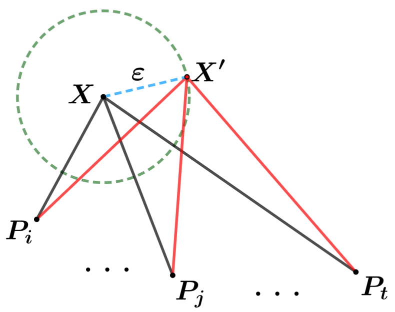
命题 4.6

设 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个互不相同的点，证明：存在一个最小球径的 n 维球 B，把这 k 个点覆盖.

证明 我们考虑构造一个函数 $d: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，满足对任意 $X \in \mathbb{R}^n$，

$$d(X) = \max_{1 \leq i \leq k} |X - P_k|.$$

从而易见，对任意给定的点 X，球 $B(X, d(X))$ 是包含 $P_1, \cdots, P_k$ 的最小球，下面证明 $d(X)$ 存在最小值.



一方面，我们先证明 $d(X)$ 的连续性，注意到对任意 X, X'，有

$$d(X) - d(X') = |X - P_i| - \max_{1 \leq s \leq k} |X' - P_s| \leq |X - P_i| - |X' - P_i| \leq |X - X'|;$$
$$d(X') - d(X) = |X' - P_j| - \max_{1 \leq s \leq k} |X - P_s| \leq |X' - P_j| - |X - P_i| \leq |X - X'|.$$

综上即有 $|d(X) - d(X')| \leq |X - X'|$，从而 $d(X)$ 一致连续，也即连续.

另一方面，显然 $\lim\limits_{|X| \to \infty} d(X) = +\infty$，从而考虑有界闭集 $D = \{X||X| \leq R\}$，则可知 $d(X)$ 在 D 上有最小值，设为 r_1，从而存在 R'，使得任意 $|X| > R'$ 有 $d(X) > r_1$，则考虑有界闭集 $D' = \{X||X| \leq R'\}$，则设其上有最小值 $d(X_0) = r$，则可知任意 $X \in \mathbb{R}^n$，$d(X) \geq r$，即 r 为 $\mathbb{R}^n$ 上的最小值.

从而考虑以 X_0 为球心，r 为球径的球，则易见这是最小的，若不然，假设存在 $B(X_1, r')$ 且 $r' < r$，则由 $d(X_1) \geq r > r'$，从而存在 $1 \leq j \leq k$，使得 $P_j \notin B(X_1, r')$，即不覆盖，矛盾！

综上即证. □

命题 4.7 (紧集的 Lebesgue 数)

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集，$\{O_i\}_{i \in I}$ 是 A 的开覆盖，证明：存在 $\delta > 0$，使得只要 $B \in \mathbb{R}^n$ 满足：

$$B \bigcap A \neq \varnothing, d(B) = \sup_{X, Y \in B} |X - Y| < \delta,$$

就存在 $i \in I$，使得 $B \subseteq O_i$.

证明 因为，$\{O_i\}_{i \in I}$ 是 A 的开覆盖，从而任意 $X \in A$，存在 O_i 使得 $X \in O_i$，而由 O_i 为开集，则存在 $r(X)$ 使得 $B(X, r(X)) \subseteq O_i$，从而考虑 A 的另一个开覆盖：

$$\bigcup_{X \in A} B\left(X, \frac{1}{2} r(X)\right),$$

则由 A 的紧性，则存在 $X_1, \cdots, X_k$ 使得有有限子覆盖

$$\left\{B\left(X_i,\frac{1}{2}r(X_i)\right)\right\}_{1\le i\le k}.$$

从而我们取

$$\delta=\min_{1\le i\le k}\left\{\frac{1}{2}r(X_i)\right\},$$

则任意 $B\bigcap A\ne\varnothing$，设 $X\in B\bigcap B\left(X_i,\frac{1}{2}r(X_i)\right)$，从而有任意 $X'\in B$，有 $|X'-X_i|\le|X'-X|+|X-X_i|\le d(B)+\frac{1}{2}r(X_i)<r(X_i)$，则可知 $B\subseteq B(X_i,r(X_i))\subseteq O_i$，即证.

下面是两个类似地多元函数连续性问题，需要较细致的考虑：

命题 4.8

设 $f(x,y,z)$ 在 $a\le x,y,z\le b$ 上连续，令

$$\varphi(x)=\max_{a\le y\le x}\left\{\min_{a\le z\le b}f(x,y,z)\right\},$$

证明：$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明 我们先证明一个更一般的结论：

引理 4.1

n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $D=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上连续，则 $n-1$ 元函数

$$g(x_1,\cdots,x_{n-1})=\min_{a_n\le x_n\le b_n}f(X)\ ,\ h(x_1,\cdots,x_{n-1})=\max_{a_n\le x_n\le b_n}f(X)$$

在 $\widetilde{D}=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$ 上连续.

我们不妨只证前者，我们设 $X=(X',x_n)$，从而由一致连续知，任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得任意 $|X-X_0|<\delta$，均有 $|f(X)-f(X_0)|<\varepsilon$.

从而设 $g(X_0')=f(X_0',x_{n0})$，对任意 $|X'-X_0'|<\delta$，设 $g(X')=f(X',x_n)$，则有

$$g(X')-g(X_0')=f(X',x_n)-f(X_0',x_{n0})\ge f(X',x_n)-f(X_0',x_n)\ge-\varepsilon,$$

$$g(X')-g(X_0')=f(X',x_n)-f(X_0',x_{n0})\le f(X',x_{n0})-f(X_0',x_{n0})\le\varepsilon.$$

综上即有 $|g(X')-g(X_0')|\le\varepsilon$，故连续，引理得证. □

从而回到原题可知 $g(x,y)=\min_{a\le z\le b}f(x,y,z)$ 连续，进而我们考虑设 $y=a+k(x-a)$，其中 $k\in[0,1]$，则显见

$$\varphi(x)=\max_{a\le y\le x}g(x,y)=\max_{a\le x\le b,0\le k\le 1}g(x,a+k(x-a)),$$

因此由引理可知这是关于 x 连续的，即证！

笔记 本题有两个十分有价值的想法，一个是引理的结论，当我对一个 n 元函数固定一个变量求最值后，新的函数关于剩下的变量仍是连续的；另外一个则是，再面对 $a\le y\le x$ 这样的非“方形”定义域，不能直接应用引理时，可以采取适当的变量代换，从而将其转化为方形领域，这个想法非常有价值.

命题 4.9

设 f 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，定义

$$\varphi(x)=\max_{a\le\xi\le x}\left\{\max_{a\le y\le\xi}f(\xi,y)\right\},$$

证明：$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明 我们类比上题做变量替换，设 $\xi=a+k(x-a)$，$y=a+l(\xi-a)=a+kl(x-a)$，从而 $f(\xi,y)=f(a+k(x-a),a+kl(x-a))=g(x,k,l)$，则 $\varphi(x)=\max_{0\le k\le1}\left\{\max_{0\le l\le1}g(x,k,l)\right\}$，由引理即可证明.

第 5 章 多元函数的极限，连续与微分

5.1 半连续函数

定义 5.1 (在一点处半连续)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f(X)$ 定义在 Ω 上，对于 $X_0 \in \Omega$，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $X \in B(X_0, \delta) \bigcap \Omega$ 时，

$$f(X) < f(X_0) + \varepsilon,$$

则称 $f(X)$ 在 X_0 上半连续，类似的可以定义在 X_0 下半连续. ♣

定义 5.2 (定义 1 的等价形式)

设 $X_0 \in \Omega$ 时 ω 的聚点，则若 $f(X)$ 在 X_0 的领域内有上界且

$$\varlimsup_{\Omega \ni X \to X_0} f(X) = \sup \lim_{\Omega \ni X_k \to X_0} f(X_k) \le f(X_0),$$

则称 $f(X)$ 在 X_0 上半连续，类似的可以定义在 X_0 下半连续. ♣

我们下面来证明两种定义的等价性.

证明 在承认定义 1 的前提下：

对任意收敛于 $\{X_0\}$ 且函数值也收敛的点列 $\{X_k\}$，对任意 $k \in \mathbb{N}^*$，有

$$f(X_k) < f(X_0) + \varepsilon,$$

对上式左侧取极限，则有

$$\lim_{\Omega \ni X_k \to X_0} f(X_k) \le f(X_0) + \varepsilon,$$

再取上极限，即有定义 2 成立；

在承认定义 2 成立的前提下：

反证法，若不然，即存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得任意 $\delta > 0$，总存在 $X_\delta \in B(X_0, \delta) \bigcap \Omega$，且

$$f(X_\delta) \ge f(X_0) + \varepsilon,$$

从而考虑其收敛点列 $\{X_k\}$，则易见

$$\varlimsup_{k \to \infty} f(X_k) \ge f(X_0) + \varepsilon > f(X_0),$$

矛盾！故定义 1 成立，综上我们证明了两种定义的等价性.

下面我们来讨论一些半连续函数的性质.

定理 5.1 (处处半连续的一个充要条件)

设 $f(X)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，则有 $f(X)$ 处处上半连续的充要条件是：对任意 $c \in \mathbb{R}$，集合 $\{X \in \mathbb{R}^n | f(X) < c\}$ 是开集；类似的，$f(X)$ 处处下半连续的充要条件是：对任意 $c \in \mathbb{R}$，集合 $\{X \in \mathbb{R}^n | f(X) > c\}$ 是开集. ♡

证明 我们仅证明上半连续的情形，下半连续的情形完全类似.

先证充分性：

若 $f(X)$ 处处上半连续，则记集合 $C_1 = \{X \in \mathbb{R}^n | f(X) < c\}$，从而任意 $X_0 \in C_1$，对 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}(c - f(X_0))$，存在 $\delta > 0$ 使得任意 $X \in B(X_0, \delta)$，有

$$f(X) < f(X_0) + \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(c + f(X_0)) < c,$$

故有 $f(X)<c$ 从而 $X\in C_1$，故存在 δ 使得 $B(X_0,\delta)\subset C_1$，即 C_1 为开集；

再证必要性：

反证法，若不然，即存在 $X_0\in\mathbb{R}^n$，$\varepsilon_0>0$ 使得任意 $\delta>0$，总存在 $X_\delta\in B(X_0,\delta)$，使得

$$f(X_\delta)\geq f(X_0)+\varepsilon,$$

从而由集合 $C_2=\left\{X\in\mathbb{R}^n|f(X)<c+\frac{1}{2}\varepsilon_0\right\}$ 为开集，且 $X_0\in C_2$，故存在 $\delta_0>0$，使得有 $B(X_0,\delta_0)\subset C_2$，矛盾！故 $f(X)$ 处处上半连续.

综上即证.

定理 5.2 (半连续函数的有界性与最值性)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，$f(X)$ 是 Ω 上的上半连续函数，则有 $f(X)$ 在 Ω 上有上界并达到最大值；类似的有，若 $f(X)$ 是 Ω 上的下半连续函数，则有 $f(X)$ 在 Ω 上有下界并达到最小值.

证明 先证明有上界性：

反证法，若不然，即存在 Ω 上的点列 $\{X_k\}$ 使得 $f(X_k)\to+\infty$，从而由 Ω 是紧集，从而也即列紧，故由 Bolozano-Weirestrass 定理可知存在收敛点列 $\{X_{k_t}\}$ 且收敛于 $X_0\in\Omega$，而由 $f(X)$ 在 X_0 处上半连续，从而由

$$\sup\lim_{\Omega\ni X_k\to X_0}f(X_k)\leq f(X_0),$$

可知 $f(X_0)\to+\infty$，矛盾！从而上半连续函数是有上界的；

再证明存在最大值：

由 $f(X)$ 有上界故可知上确界 $M=\sup\limits_{X\in\Omega}f(X)$ 的存在性，反证法若不存在 X 使得 $f(X)=M$，则有

对任意 $X_0\in\Omega$，$f(X_0)<M$，从而对 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}(M-f(X_0))$，存在 $B(X_0,\delta_0)\bigcap\Omega$，使得任意 $X\in B(X_0,\delta_0)\bigcap\Omega$，均有

$$f(X)<f(X_0)+\varepsilon_0<\frac{1}{2}(M+f(X_0)).$$

从而有 $\bigcup\limits_{X_0\in\Omega}B(X_0,\delta_0)$ 是紧区域 Ω 的一个开覆盖，故存在有限子覆盖 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}B(X_k,\delta_k)$，从而有任意 $X\in\Omega$，有

$$f(X)<\max_{1\leq k\leq m}\left\{\frac{1}{2}\left(f(X_k)+M\right)\right\}=M',$$

而 $M'<M$，故 M' 为一个比 M 小的上界，矛盾！故 $f(X)$ 可以取到最大值.

关于半连续函数的其他性质可以在后续课程中了解到，也可以参阅文献进一步了解.

下面解决关于半连续函数的一个命题：

命题 5.1 (第 10 章 B 组第 12 题)

设 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数.

(1) 对于任意 $X,Y\in\mathbb{R}^n$，求证

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(X+tY)-f(X)}{t}$$

存在，且记这个极限为 $f'(X;Y)$；

(2) 求证 $f'(X;Y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的上半连续函数.

证明 (1) 设 $d(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(X+tY)-f(X)}{t}(t>0)$，从而由 $f(X)$ 是上凸函数，故对任意 $t_1>t_2>0$，有

$$\frac{t_1-t_2}{t_1}f(X)+\frac{t_2}{t_1}f(X+t_1Y)\geq f(X+t_2Y),$$

化简即有

$$d(t_1)=\frac{f(X+t_1Y)-f(X)}{t_1}>\frac{f(X+t_2Y)-f(X)}{t_2}=d(t_2),$$

从而 $d(t)$ 单调递减，当 $t \to 0^+$.

而我们同样地可证明 $d(t_3) > d(-t_4)(t_3, t_4 > 0)$，从而 $t > 0$ 时，$d(t)$ 单调递减且有下界.

故 $\lim\limits_{t\to 0^+} d(t)$ 存在，即证.

(2) 任意 $X, Y \in \mathbb{R}^n$，注意到任意 $\lambda > f'(X;Y)$，从而存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\frac{f(X+t_0Y)-f(X)}{t_0} < \lambda,$$

而由 $f(X)$ 为凸函数，从而为连续函数，故有

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{f(X_i+t_0Y_i)-f(X_i)}{t_0} = \frac{f(X+t_0Y)-f(X)}{t_0} < \lambda,$$

从而存在自然数 N，任意 $i > N$，有

$$\frac{f(X_i+t_0Y_i)-f(X_i)}{t_0} \le \lambda,$$

故由 (1) 中 $d(t)$ 单调递减性，有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(X_i+tY_i)-f(X_i)}{t} \le \frac{f(X_i+t_0Y_i)-f(X_i)}{t_0} \le \lambda,$$

也即

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, f'(X_i;Y_i) \le f'(X;Y)$$

从而可知 $f'(X;Y)$ 是上半连续函数，即证.

多元凸函数的可微性等其他性质可以在其他书籍中查阅了解，这里不做讨论.

5.2 二元函数可变量代换为一元函数问题

很多二元函数，在满足特定的偏导数条件后，可以通过适当的换元，使得将二元函数变量代换为一个一元函数.

证明这类题目的一般思路就是设出两个" 对偶" 的变量，均可以反向唯一确定 x, y，进而证明变量代换后，关于某一新变量的偏导数为 0，下面通过一些题目来体现这个方法.

命题 5.2

设可微函数 $z = f(x,y)$ 满足：

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

证明：$f(x,y)$ 可以写成仅关于 xy 的函数.

证明 我们做变量代换 $s = xy$，$t = x$，从而有：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial s}$$

从而有：

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

因此有 $\dfrac{\partial z}{\partial t} = 0$，故 $z(s,t)$ 与 t 无关，即 $f(x,y)$ 可以写成仅关于 xy 的函数.

笔记 在上述证明中可以看到，核心步骤就在于论证 $\dfrac{\partial z}{\partial t} = 0$，而事实上，这里 $t = x$ 这样的变量代换是否是唯一的呢？一般情况下，我们都选择最简单，容易计算的情况，这里也可以选取 $t = x + y$ 等，这样的事实将在后面的题中进一步展现.

命题 5.3

设可微函数 $z = g(x, y)$ 满足:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

证明: $g(x, y)$ 可以写成仅关于 $\arctan\frac{y}{x}$ 的函数.

证明 我们做变量代换 $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $r = \frac{x}{\cos\theta}$, 则此时容易看见即极坐标代换: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

从而有:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

也即有:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta = \frac{x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}}{r} = 0.$$

从而 $z(r,\theta)$ 与 r 无关, 即可以写成仅关于 $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ 的函数.

上面两个题的变量代换还比较明显, 下面一个例子的" 对偶" 构造将不那么明显, 却也可以更好的体现出这类换元的思想.

命题 5.4

设可微函数 $z = h(x, y)$ 满足:

$$b\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y}.$$

其中 $ab \neq 0$, 证明: $h(x, y)$ 可以写成仅关于 $ax + by$ 的函数.

证明 设 $u = ax + by$, 我们下一步需要考虑的是 $v(x, y)$ 的构造, 这个该如何考虑?回顾我们的解题思路, 我们希望这样的变量也可以反过来确定 x, y, 即相当于考虑方程组解唯一:

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

因此我们自然想到不妨取线性变量代换, 那么只需保证行列式不为 0, 结合 $ab \neq 0$ 可知 $a^2 + b^2 \neq 0$, 也即:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

从而我们想到了令 $v = -bx + ay$, 从而反解可得 $x = \frac{au - bv}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{bu + av}{a^2 + b^2}$.

从而有:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-b\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y}}{a^2 + b^2} = 0.$$

因此我们可知 $z(u, v)$ 与 v 无关, 即 $h(x, y)$ 可以写成仅关于 $ax + by$ 的函数.

因此这些结论告诉我们, 当给出这些 PDE(偏微分方程) 条件之后, 我们可以选取合适的换元使得转化为单元函数问题, 如看下例:

例题 5.1 设可微函数 $z = f(x, y)$ 满足:

$$2022\frac{\partial z}{\partial x} = 2021\frac{\partial z}{\partial y}.$$

且 $f(1, t)$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 单调递增, 试比较 $f(2021, 2022)$ 与 $f(2022, 2021)$ 的大小.

5.3 微分同胚

微分同胚是微分流形中的基本概念之一，在数学分析课程中，可以将局部的微分同胚结构看作是逆映射定理的另一种表示语言，但更一般的微分同胚也有整体上的结果，本节主要针对 B 组题目中涉及到的微分同胚习题进行整理.

定义 5.3 (微分同胚)

设 D 和 E 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集，如果 $G: D \to H$ 有逆映射 $H: E \to D$，且 G 与 H 均为 C^r 映射，则称 G 是从 D 到 E 的 C^r 微分同胚，类似的，称 H 是从 E 到 D 的 C^r 微分同胚.

因此我们可以写出逆映射定理的等价定理——局部微分同胚定理：

定理 5.3 (局部微分同胚定理)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集，$F: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射，$X_0 \in U$，且 $\det \boldsymbol{J}_F(X_0) \neq 0$，则存在 X_0 的领域 $W \subseteq U$ 和 $F(X_0)$ 的领域 V，使得 $F: W \to V$ 是 C^r 微分同胚.

下面给出一些关于微分同胚的命题.

命题 5.5 (B 组题 9 的加强形式)

设 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，且存在 $\lambda > 0$，使得任意 $X \in \mathbb{R}^n$，有

$$\alpha \cdot \boldsymbol{J}_F(X) \cdot \alpha^{\mathrm{T}} \geq \lambda |\alpha|^2,$$

证明对任意 $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 有

$$|F(X) - F(Y)| \geq \lambda |X - Y|,$$

且 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 微分同胚.

证明 任意 $X, Y \in \mathbb{R}^n$，我们构造函数 $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$：

$$\varphi(t) = \langle Y - X, F(X + t(Y - X)) - F(X) \rangle,$$

从而易见这是连续可微的函数，且 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = \langle Y - X, F(Y) - F(X) \rangle$，从而由 Lagrange 中值定理可知，存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t) = \left\langle Y - X, \boldsymbol{J}_F(X + \theta(Y - X)) \cdot (Y - X)^{\mathrm{T}} \right\rangle,$$

进而由 Cauchy 不等式及题干条件有

$$\begin{aligned}
|Y - X| \cdot |F(Y) - F(X)| &\geq \langle Y - X, F(Y) - F(X) \rangle \\
&= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= (Y - X) \cdot \boldsymbol{J}_F(X + \theta(Y - X)) \cdot (Y - X)^{\mathrm{T}} \geq \lambda |Y - X|^2
\end{aligned}$$

即有 $|F(X) - F(Y)| \geq \lambda |X - Y|$，从而第一部分得证 (这即 B 组题 9 的题干条件).

我们为了证明 F 是微分同胚即等价于在上述条件下 F 是双射，一方面 F 是单射是平凡的，下考虑 F 是满射，即证明 $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$，等价于证明 $F(\mathbb{R}^n)$ 既开又闭 (根据 $\mathbb{R}^n$ 的连通性).

一方面，任取收敛点列 $\{F(X_k)\}$，且收敛于 Y_0，则其为 Cauchy 列，从而其满足 Cauchy 收敛条件，进而结合 $|F(X_m) - F(X_k)| \geq \lambda |X_m - X_k|$，从而显见 $\{X_k\}$ 也为 Cauchy 列，从而设其收敛于 X_0，则由连续性可知 $\{F(X_k)\}$ 收敛于 $F(X_0)$，从而 $Y_0 = F(X_0)$，即 $Y_0 \in \mathbb{R}^n$，即 $F(\mathbb{R}^n)$ 上的列闭集，进而为闭集.

另一方面，我们先证明任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 有 $\boldsymbol{J}_F(X)$ 均非奇异，反证法若不然，设存在 X_0 使得 $\boldsymbol{J}_F(X_0)$ 奇异，则存在 ΔX 使得 $\boldsymbol{J}_F(X)\Delta X^{\mathrm{T}} = O$，从而由 F 是 C^1 的即可微，则有

$$F(X_0 + t\Delta X) - F(X_0) = t\boldsymbol{J}_F(X_0)\Delta X^{\mathrm{T}} + o(t) = o(t),$$

这与 $|F(X_0 + t\Delta X) - F(X_0)| \geq \lambda \cdot t |\Delta X|$ 矛盾！从而由 11.5 节定理 4 可知 $F(\mathbb{R}^n)$ 为开集，综上即证.□

笔记 (1) 关于定理 4 的证明，主要思路就是由逆映射定理可知任何一点处其 Jacobi 矩阵非奇异则映射是领域到领域的，从而 $F(D)$ 是若干领域的并，故为开集；

(2) 事实上对于题给中条件下证明 F 为满射，还有一个类似的问题 (困难许多)：

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧集，映射 $F: K \to K$ 满足：对任意 $X, Y \in K$，有 $|F(X) - F(Y)| \geq |X - Y|$，则 F 是双射，且事实上有 $|F(X) - F(Y)| = |X - Y|$.

命题 5.6 (B 组题 10)

设 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，$\boldsymbol{J}_F(X)$ 处处非奇异且

$$\lim_{|X| \to +\infty} |F(X)| = +\infty,$$

求证：对任意 $Y_0 \in \mathbb{R}^n$，存在 $X_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $F(X_0) = Y_0$，且这样的 X_0 仅有有限多个.

证明 我们先证明对任意 $Y_0 \in \mathbb{R}^n$，存在 $X_0 \in \mathbb{R}^n$，即 F 为满射，也即 $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$，等价于证明 $F(\mathbb{R}^n)$ 既开又闭 (与上一个题基本上类似的想法，只不过细节上处理手段不同)

一方面类似地，结合 Jacobi 矩阵处处非奇异可知 F 将开集映为开集，进而 $F(\mathbb{R}^n)$ 为开集. 另一方面，任取收敛点列 $\{F(X_k)\}$，则有 $\{X_k\}$ 有界，若不然，则由 $\lim\limits_{|X| \to +\infty} |F(X)| = +\infty$ 可知存在点列使得 $\{F(X_k)\}$ 发散，矛盾，从而由 Bolozano-Weierstrass 定理可知 $\{X_k\}$ 有收敛点列 $\{X_{k_m}\}$，设其收敛于 X_0，则由连续性可知 $\{F(X_{k_m})\}$ 收敛于 $F(X_0)$，从而 $\{F(X_k)\}$ 收敛于 $F(X_0)$，因此 $F(\mathbb{R}^n)$ 是列闭集，即闭集，从而综合两方面有 $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$，即证.

另一方面，反证这样的 X_0 有无穷多个，则可知其均有界，不妨取其中一个收敛点列 $\{X_k'\}$，设其收敛于 X_0'，从而由连续性可知 $F(X_0') = Y_0$，进而由 $\boldsymbol{J}_F(X_0')$ 非奇异，从而由局部逆映射定理，可知存在 X_0' 的一个领域使得存在逆映射 G，但任意领域总包含 $\{X_k'\}$ 中的项，这表明 $G(Y_0)$ 不确定，矛盾！综上得证. □

笔记 事实上本题有更进一步的结果，即把有限个加强为 1 个：

定理 5.4

设 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，$\boldsymbol{J}_F(X)$ 处处非奇异，则 F 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^1 微分同胚的充要条件为

$$\lim_{|X| \to +\infty} |F(X)| = +\infty.$$

但这需要用到泛函分析等其他更深入的数学知识，在数学分析中上面的命题是能做到的最好结果，关于这一结论可以参考 Deimling K 的专著：《*Nonliner Functional Analysis*》第 171 页.

下面两个定理我们习惯上称其为“秩定理”，形象的理解它们可以参考知乎回答.

命题 5.7 (B 组题 11)

设 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为 C^1 映射，$X_0 \in \mathbb{R}^n$，$Y_0 = F(X_0)$ 且 $\boldsymbol{J}_F(X_0)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性单射且不是满射，求证：$n < m$，且存在 X_0 的领域 U 和 Y_0 的邻域 V，以及从 V 到 $\mathbb{R}^m$ 中某开区域 W 的 C^1 微分同胚 H，使得映射 $H \circ F: U \to W$ 满足对任意 $X = (x_1, \cdots, x_n) \in U$：

$$H \circ F(X) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) \in W \subseteq \mathbb{R}^m.$$

证明 一方面，由 $\boldsymbol{J}_F(X_0)$ 是线性单射，从而其列满秩，因此秩为 n，又不为线性满射，从而其行不满秩，即秩小于 m，因此立有 $n < m$. 因此存在 n 阶子式不为 0，不妨设为 $\dfrac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}(X_0) \neq 0$.

从而我们重新考虑一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的 C^1 映射：$\widetilde{F}(X) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)(X)$，则显见有 $\widetilde{F}(X_0) = \widetilde{Y}_0 = (y_{10}, \cdots, y_{n0})$. 因此由 $\widetilde{F}$ 在 X_0 处的 Jacobi 矩阵非奇异，可知由逆映射定理知，存在 X_0 的领域 U 和 $\widetilde{Y}_0$ 的领域 $\widetilde{V}$，使得 $\widetilde{F}$ 是 U 到 $\widetilde{V}$ 上的微分同胚，从而记 $G = (g_1, \cdots, g_n)$ 为 $\widetilde{F}$ 的逆映射，也即满足

$$g_i(y_1, \cdots, y_n) = x_i (1 \leq i \leq m),$$

下面我们来构造微分同胚 H.

我们首先取 Y_0 的领域为 $V=\widetilde{V}\times\mathbb{R}^{m-n}$，我们定义从 V 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射 $H=(h_1,\cdots,h_m)$ 为

$$h_i(y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_m)=g_i(y_1,\cdots,y_n)(1\le i\le n)$$

$$h_j(y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_m)=y_j-f_j\circ G(y_1,\cdots,y_n)(n+1\le j\le m),$$

从而容易看到这个映射 H 的构造即满足任意 $X\in U$ 有 $H\circ F(X)=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)$，下面证明这是个微分同胚，任取 $Y=(y_1,\cdots,y_m)\in V$，其 Jacobi 行列式满足：

$$\frac{D(h_1,\cdots,h_m)}{D(y_1,\cdots,y_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} & \\ \vdots & & \vdots & \boldsymbol{O} \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} & \\ & * & & \boldsymbol{I}_{m-n}\end{vmatrix}=\frac{D(g_1,\cdots,g_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\ne 0.$$

从而取 $W=H(V)$，由逆映射定理即可知 H 是 V 到 W 的微分同胚，综上即证。 □

笔记 在本题中 H 来源的核心想法是，首先需要一个逆映射把 F 里的所有 x 变回去，还需要添上许多 0，而我们下一个想的就是怎么产生逆映射的结构呢？由于逆映射是在小空间上的同胚，肯定需要一个小空间上的 “F”，因此我们就想到了取 F 的 n 个线性无关的部分，对这些部分去取逆映射，那么对剩下的补上 0，在逆映射的基础上也是容易构造的了.

命题 5.8 (B 组题 12)

设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为 C^1 映射，$X_0\in\mathbb{R}^n$，$Y_0=F(X_0)$ 且 $\boldsymbol{J}_F(X_0)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性满射且不是单射，求证：$n>m$，且存在 X_0 的邻域 U 和从 $\mathbb{R}^n$ 中的开区域 W 到 U 的 C^1 微分同胚 H，使得对任意 $X=(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\in W$：

$$F\circ H(X)=(x_1,\cdots,x_m).$$

证明 证明 $n>m$ 与上题类似，这里略去. 从而也有一个 m 阶子式非 0，不妨设为 $\dfrac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_m)}(X_0)\ne 0$，从而我们考虑构造函数 $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，其中 $\widetilde{F}(x_1,\cdots,x_n)=(f_1(X),\cdots,f_m(X),x_{m+1},\cdots,x_n)$，从而我们再定义一个线性映射 π，表示取 n 维向量的前 m 个坐标，也即：

$$\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\pi(x_1,\cdots,x_m,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_m).$$

从而显见 $F=\pi\circ\widetilde{F}$，进一步我们可计算 $\widetilde{F}$ 处的 Jacobi 矩阵：

$$\frac{D(\widetilde{F}_1,\cdots,\widetilde{F}_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \\ \vdots & & \vdots & * \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \\ & \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{I}_{n-m}\end{vmatrix}=\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_m)}\ne 0,$$

因此可知其在 X_0 处的 Jacobi 矩阵非奇异，进而由逆映射定理，存在逆映射 H 使得对 X_0 的邻域 U，以及开区域 $W=\widetilde{F}(U)$，有 $H(W)=U$，从而可知 $\widetilde{F}\circ H(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)$，即 $\widetilde{F}\circ H$ 是恒等映射，进而可知：

$$F\circ H(X)=\left(\pi\circ\widetilde{F}\right)\circ H(X)=\pi\circ\left(\widetilde{F}\circ H\right)(X)=\pi(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_m).$$

笔记 对这个结论，首先想到的应该是，$F\circ H$ 的作用效果相当于是取了前 m 个坐标分量，那么如果我们把这个作用效果提出来 (即 π)，那么剩下的就应该是一个恒等映射，这就让我们想到了若 $F=\pi\circ\widetilde{F}$，那么 $\widetilde{F}\circ H$ 就该是恒等的，因此就想到需要对 $\widetilde{F}$ 取逆映射，那么 $\widetilde{F}$ 又该如何构造呢？即要探索补上 $n-m$ 个什么东西，那么结合 Jacobi 矩阵的形式，就可发现取坐标填上去即可.

注 关于秩定理，Zorich 和 Baby Rudin 里都有详细介绍，确实感觉很难李姐，但 NKU 教材却把它当习题而不细讲，难绷，不过或许以后会再深入学习......

5.4 函数相关性

作为隐函数定理的一个应用,我们在此讨论一组函数是否相关的问题.

定义 5.4 (函数相关与独立)

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开区域和定义于 D 内的一组函数

$$y_i = y_i(x_1, \cdots, x_m), \quad i = 1, \cdots, m.$$

将 $(y_1, \cdots, y_m)$ 视为 $\mathbb{R}^m$ 中的点，因此这一组函数就定义了一个向量值函数 $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$，其值域为

$$F(D) = \{(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m | y_i = y_i(x_1, \cdots, x_n), 1 \le i \le m, (x_1, \cdots, x_n) \in D\}.$$

如果存在 $\mathbb{R}^m$ 中的开区域 Ω 与函数 $\varphi \in C^1(\Omega)$ 且 $\nabla_\varphi \neq 0$，使得 $F(D) \in \Omega$，且

$$\varphi(y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \cdots, x_n) \in D,$$

则称 $y_1(x_1, \cdots, x_n, \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n))$ 在 D 内函数相关，如果这组函数在 D 的任何子区域都不相关，则称它们在 D 内函数独立. ♣

定理 5.5 (B 组题 13)

设 $F = (f_1, \cdots, f_m)^\mathsf{T}$ 是区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 内定义的 C^1 向量值函数. 区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 满足 $F(D) \subseteq \Omega$，求证：若 $f_1, \cdots, f_m$ 在 D 内函数相关，即存在函数 $\varphi \in C^1(\Omega)$，使 $\nabla_\varphi \neq 0$ 且

$$\varphi(f_1(X), \cdots, f_m(X)) = 0, \quad \forall X \in D,$$

则 $\boldsymbol{J}_F(X)$ 的秩在 D 内处处小于 m. ♡

证明 由 $g(X) = \varphi(f_1(X), \cdots, f_m(X)) = 0, \forall X \in D$ 可知 G 是一个常值函数，从而其导数恒为 0，即有任意 $X \in D$，

$$\nabla_g(X) = \nabla_\varphi(X) \cdot \boldsymbol{J}_F(X) \equiv 0,$$

即 $\boldsymbol{J}_F(X)^\mathsf{T} \cdot (\nabla_\varphi(X))^\mathsf{T} \equiv 0$，而 $\nabla_\varphi(X)^\mathsf{T} \neq \boldsymbol{O}$，也即线性方程组 $\boldsymbol{J}_F(X)^\mathsf{T}\alpha = \boldsymbol{O}$ 有非零解，从而其不是线性单射，因此其列不满秩，即秩总小于 m，即证. □

上面这个问题是相对平凡的，下面这个命题某种程度上可以看作上面这个问题的逆命题.

定理 5.6 (B 组题 14)

设 $F = (f_1, \cdots, f_m)^\mathsf{T}$ 是区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 内定义的 C^1 向量值函数，求证：若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{J}_F(X) \le r < m$，且存在点 $X_0 \in D$，使 $\operatorname{rank} \boldsymbol{J}_F(X_0) = r$，则存在 X_0 的小邻域 $U \subseteq D$ 使得 $f_1, \cdots, f_m$ 在 D 内函数相关，即存在函数 $\varphi \in C^1(\Omega)$，使 $F(U) \subseteq \Omega$，$\nabla_\varphi \neq 0$ 以及

$$\varphi(f_1(X), \cdots, f_m(X)) = 0, \quad \forall X \in U.$$

♡

5.5 难题选解

命题 5.9 (B 组第 2 题-凸函数的性质一)

设 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数，且在 $\mathbb{R}^n$ 上所有的偏导数都存在. 证明：$f(X)$ 所有的偏导数都在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

证明 不失一般性，只需考虑在原点 O 处的连续性，任取 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$，下证：

$$\lim_{X\to 0}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(O).$$

注意到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_k+\Delta x,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)}{\Delta x}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_k+t\Delta x,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)}{t\Delta x}(\text{固定}\Delta x)\\&\overset{\text{Def}}{=}\lim_{t\to 0}\varphi(t)\end{aligned}$$

而注意到若不妨设 $t_1>t_2>0$，则由 $f(X)$ 是凸函数，从而：

$$\frac{t_2}{t_1}f(x_1,\cdots,x_k+t_1\Delta x,\cdots,x_n)+\frac{t_1-t_2}{t_1}f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)\geq f(x_1,\cdots,x_k+t_2\Delta x,\cdots,x_n),$$

也即 $\varphi(t_1)>\varphi(t_2)$，同理可证对 $t_4<t_3<0$，有 $\varphi(t_3)>\varphi(t_4)$，从而可知，对固定的 Δx，有：

$$\varphi(-1)\leq\lim_{t\to 0}\varphi(t)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)\leq\varphi(1),$$

也即：

$$\frac{1}{\Delta x}\left[f(X)-f(x_1,\cdots,x_k-\Delta x,\cdots,x_n)\right]\leq\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)\leq\frac{1}{\Delta x}\left[f(x_1,\cdots,x_k+\Delta x,\cdots,x_n)-f(X)\right],$$

从而有函数 f 连续可知，在上式中令 $X\to O$，则有：

$$\frac{1}{\Delta x}\left[f(O)-f(0,\cdots,-\Delta x,\cdots,0)\right]\leq\lim_{X\to O}\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)\leq\frac{1}{\Delta x}\left[f(0,\cdots,\Delta x,\cdots,0)-f(X)\right],$$

由 Δx 任意，因此令 $\Delta x\to 0$，则由夹逼定理可知 $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(O)$，即关于 x_k 的偏导数在 O 处连续，容易得到 $\mathbb{R}^n$ 上的所有点 (平移)，即证.

笔记 本题困难的地方在于，很不容易想到可以利用凸函数得到不等式关系后，再分次序求极限，最后比较轻松的解决了问题.

命题 5.10 (B 组第 5 题)

设 $X_0\in\mathbb{R}^n$，$f(X)$ 在 X_0 的某领域内二次连续可微，$\nabla f(X_0)=0$，Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}_f(X_0)$ 正定，证明：存在 $\delta>0$，使得对任意 $X\in B_\delta(X_0)\setminus\{X_0\}$，都有：

$$\langle\nabla f(X),X-X_0\rangle>0.$$

证明 我们先证明一个引理：

引理 5.1

存在 $\delta>0$，使得对任意 $X\in B_\delta(X_0)$，都有 $\boldsymbol{H}_f(X)$ 正定.

注意到：

$$\boldsymbol{H}_f(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}&\cdots&\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\\vdots&\cdots&\vdots\\\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}(X)$$

我们考虑 n 个关于 X 的函数，由 $f(X)$ 二次连续可微，从而可知以下这些函数均为连续函数：

$$g_1(X)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X),\cdots,g_k(X)=\det\left(\boldsymbol{H}_f\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}(X)\right),\cdots,g_n(X)=\det\left(\boldsymbol{H}_f(X)\right),$$

这里 $\boldsymbol{H}_f\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}(X)$ 表示 $\boldsymbol{H}_f(X)$ 第 k 个顺序主子矩阵.

从而由 $\boldsymbol{H}_f(X_0)$ 正定，从而由高等代数知识我们可知，任意 $1\le k\le n$，均有 $g_k(X_0)>0$，从而由连续性可知，存在 $\delta_k>0$，使得任意 $X\in B_{\delta_k}(X_0)$，均有 $g_k(X)>\frac{g_k(X_0)}{2}>0$，从而我们取 $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}\delta_k$，故可知 $X\in B_\delta(X_0)$，均有 $\boldsymbol{H}_f(X)$ 的每个顺序主子式大于 0，从而可知 $\boldsymbol{H}_f(X)$ 正定，引理得证！

回到原题，下证引理中的 δ 为一个符合要求的.

我们考虑 Taylor 展开，知存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ 使得：

$$f(X)-f(X_0)=\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_1\Delta X)\Delta X$$

$$f(X_0)-f(X)=\langle\nabla f(X),X_0-X\rangle+\frac{1}{2}(-\Delta X)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X-\theta_2\Delta X)(-\Delta X)$$

这里 $\Delta X=X-X_0$，从而设 $\theta_3=1-\theta_2$，又由 $\nabla f(X_0)=0$，从而进一步我们有：

$$f(X)-f(X_0)=\frac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_1\Delta X)\Delta X$$

$$f(X_0)-f(X)=-\langle\nabla f(X),X-X_0\rangle+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_3\Delta X)\Delta X$$

从而即有：

$$\langle\nabla f(X),X-X_0\rangle=\frac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\left(\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_1\Delta X)+\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_3\Delta X)\right)\Delta X.$$

而由引理可知，$\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_1\Delta X)$ 与 $\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta_3\Delta X)$ 均为正定阵，从而可知结合 $\Delta X\ne 0$，有：

$$\langle\nabla f(X),X-X_0\rangle>0.$$

笔记 这个引理十分关键，也为我们进一步体会函数连续性有了深刻的认识，这个引理的想法和高等代数里的"摄动法"有异曲同工之妙.

命题 5.11 (凸函数的性质二)

(i) 在凸区域 D 内定义的函数 $f\in C^1(D)$ 是凸函数的充要条件为：

$$f(X)-f(X_0)\ge\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle,\forall X,X_0\in D.$$

(ii) 在凸区域 D 内定义的函数 $f\in C^2(D)$ 是凸函数的充要条件为 $\boldsymbol{H}_f(X)\ge 0$(即 $\boldsymbol{H}_f(X)$ 半正定).

笔记 我们从两方面理解这个结论：

(1) 代数上，容易看到这相当于是对一元函数情况的推广，(i) 是 $f(x)-f(x_0)\ge f'(x_0)(x-x_0)$，第二个则相当于二阶导数单调递增；

(2) 几何上，(i) 可以看作曲面 (可能高维) 在一条切线 (平面) 的上方，(ii) 也类似，这两个某种程度上也刻画了凸函数图像的几何性质.

证明 (i) 我们先证明充分性，任意 $X_1,X_2,X_0=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in D$，有

$$f(X_1)-f(X_0)\ge\langle\nabla f(X_0),X_1-X_0\rangle=(1-\lambda)\langle\nabla f(X_0),X_1-X_2\rangle$$

$$f(X_2)-f(X_0)\ge\langle\nabla f(X_0),X_2-X_0\rangle=\lambda\langle\nabla f(X_0),X_2-X_1\rangle$$

从而第一个式子乘上 λ 加上第二个式子乘上 $1-\lambda$，相加即可得证充分性.

再证明必要性，这是稍有难度的.

不失一般性，我们仍假设 $X_0=O$(这类操作将会频繁出现在凸函数问题中，需要体会这里面的深意)，从而

由偏导数连续，我们需要证明的即

$$f(X)-f(O)\geq\langle\nabla f(O),X\rangle=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(O)x_k,$$

而如何才能凑出右边的式子呢？我们联想结构，发现如果考虑函数 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)$，如果其关于 t 求导就会出现这样的式子，也即我们发现有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tX)-f(O)}{t}\sim\frac{\mathrm{d}f(tX)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(O)x_k,$$

因此我们下一步就需要研究 ~ 到底代表着什么，我们自然，希望它是不等号. 为了实现这个目标，我们还需要对 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(O)x_k$ 做一点转化，容易看到，其可以表示为：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(tx_k\boldsymbol{e}_k)-f(O)}{t}$.

同样也自然地，我们构造 $\varphi(t)=\dfrac{f(tX)-f(O)}{t}$，则有 $\varphi(1)=f(X)-f(O)$，又注意到这个函数在凸函数的问题中非常常见，在前面的问题中我们已经论证了，$\varphi(t)$ 是一个关于 t 的单调增函数，从而我们有放缩

$$\begin{aligned}f(X)-f(O)=\varphi(1)&\geq\lim_{t\to 0}\varphi(t)\\&\geq\lim_{t\to 0^-}\frac{f(O)-f(tX)}{-t}\\&\geq\lim_{t\to 0^-}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(O)-f(tx_k\boldsymbol{e}_k)}{-nt}(*)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(O)x_k\end{aligned}$$

其中 (*) 处这里的阴间放缩利用了凸函数的 $f\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_m}{m}\right)\leq\dfrac{f(X_1)+f(X_2)+\cdots+f(X_m)}{m}$，这个不等式的目的主要是将每个偏导数分离出来，十分的不易想到，这里核心思路是正向的方向反号，那就先利用凸函数的“常用函数”放缩到负项那里，再在负数运用裂开不等式，从而取极限得到证明.

(ii) 必要性：若 $\boldsymbol{H}_f(X)\geq 0$，则对任意 $X,X_0\in D$，由 Taylor 公式有：

$$f(X)-f(X_0)=\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0+\theta\Delta X)\Delta X,\theta\in(0,1).$$

从而可知 $f(X)-f(X_0)\geq\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle$，由 (i) 可知 f 为凸函数.

再证明充分性，若 f 为凸函数，但反证若存在 X_0 使得 $\boldsymbol{H}_f(X_0)<0$，从而由 Taylor 公式：

$$f(X)-f(X_0)=\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0)\Delta X+o((\Delta X)^2).$$

从而由 (i) 知对凸函数有 $f(X)-f(X_0)\geq\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle$，进而可知 $\dfrac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0)\Delta X+o((\Delta X)^2)>0$，固定 ΔX，从而记

$$\chi(t)=f(X_0+t\Delta X)-f(X_0)-\langle\nabla f(X_0),t\Delta X\rangle,$$

故可知其恒大于 0，但由 $\boldsymbol{H}_f(X_0)<0$，从而 $\dfrac{1}{2}\Delta X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(X_0)\Delta X=A<0$，则 $0<\chi(t)=At^2+o(t^2)$，即 $0<A+\dfrac{o(t^2)}{t^2}$，取 $t\to 0$ 则可知矛盾！

注 容易发现，当考虑到的维数升高时，问题的困难程度和抽象程度会大大提高，同时也会涉及到更直觉的不等式放缩技巧.

命题 5.12

设 $a_1,\cdots,a_n$ 为不同时为 0 的实数，定义：

$$A_1=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2},A_3=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)^3},A_4=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^4}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2},$$

证明：

$$nA_4+2\sqrt{A_1A_3}\geq nA_3+A_1A_4+1.$$

证明 我们构造矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n\end{pmatrix},$$

从而对任意 $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，有

$$XAX^{\mathsf{T}}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2x+a_iy+z)^2\geq 0.$$

因此矩阵 A 正定，进而有 $\det(A)\geq 0$，化简即可得到原不等式，即证.

笔记 这个题的结果是从计算 $\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)$ 极小值时得到的 Hesse 矩阵，从而类似地我们可以搓出进一步 n 阶的 Hesse 正定阵，从而得到许多阴间不等式，这里都大同小异，略去.

命题 5.13 (B 组题 16)

设 $P=(a_{ij})$ 为三阶正定方阵，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^3$ 且 $|\beta|=1$，求曲面

$$S:\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=1$$

被平面 $\pi:\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3=0$ 所截成的封闭曲线在 π 上所围区域的面积.

解 我们先做平移变换，将曲面 S 平移至原点，从而不妨设存在合同变换 (由 P 正定)：

$$P=Q^{\mathsf{T}}\cdot\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right\}\cdot Q,$$

令 $(x,y,z)=Q(x_1,x_2,x_3)^{\mathsf{T}}$，从而有 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，又由 $\beta(x_1,x_2,x_3)^{\mathsf{T}}=0$，即有 $\beta Q^{-1}(x,y,z)^{\mathsf{T}}=0$. 进而设 $\beta Q^{-1}=(A,B,C)$，而由所作的线性变换相当于向量的平移旋转，因此保持距离和面积，因此由 $|\beta|=1$，有 $A^2+B^2+C^2=1$. 进而问题转化成求

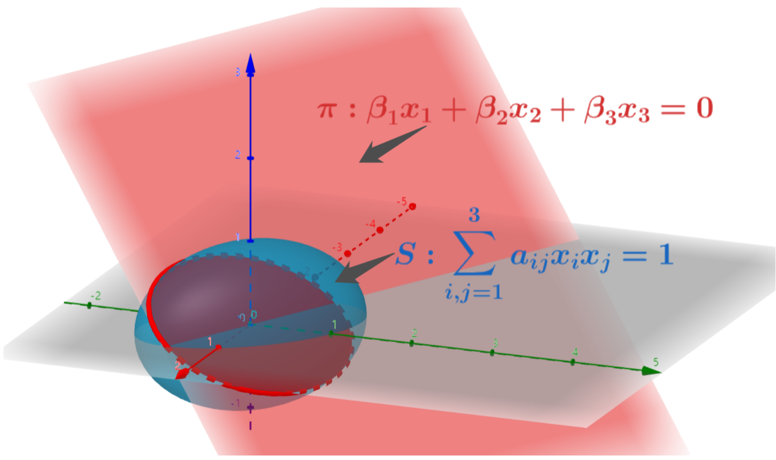


图 5.1

$$\pi' = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$$

的面积，易知截面为椭圆，因此只需求出长短半轴，也即 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的条件最大最小值.

构造 Lagrange 乘子函数：$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 \right) + \lambda_2 (Ax + By + Cz)$，从而有

$$\begin{cases} \nabla_L = \mathbf{0} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\left(1 + \dfrac{1}{a^2}\right) x + A\lambda_2 = 0 & (1) \\ 2\left(1 + \dfrac{1}{b^2}\right) y + B\lambda_2 = 0 & (2) \\ 2\left(1 + \dfrac{1}{c^2}\right) z + C\lambda_2 = 0 & (3) \end{cases},$$

则由 $x \cdot (1) + y \cdot (2) + z \cdot (3)$ 有 $2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_1 = 0$，也即 $\lambda_1 = -r^2$，代入即有 $x = \dfrac{\lambda_2 A a^2}{2(r^2 - a^2)}$，$y = \dfrac{\lambda_2 B b^2}{2(r^2 - b^2)}$，$z = \dfrac{\lambda_2 C c^2}{2(r^2 - c^2)}$，显然 $\lambda_2 \neq 0$，否则有 $x = y = z = 0$. 进而由 $Ax + By + Cz = 0$，有

$$\frac{A^2 a^2}{r^2 - a^2} + \frac{B^2 b^2}{r^2 - b^2} + \frac{C^2 c^2}{r^2 - c^2} = 0(*),$$

因此当 r 取到最大最小值时一定满足 (*)，即 $r_{\max}, r_{\min}$ 是 (*) 两根，化简由 Vieta 定理可得

$$r_{\max}^2 \cdot r_{\min}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (A^2 + B^2 + C^2)}{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2} = a^2 b^2 c^2 \Bigg/ (A, B, C) \begin{pmatrix} a^2 & & \\ & b^2 & \\ & & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

进而由 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}} \cdot \operatorname{diag}\left\{ \dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2} \right\} \cdot \boldsymbol{Q}$ 可知 $\operatorname{diag}\{a^2, b^2, c^2\} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}$，又由 $(A, B, C) = \beta \boldsymbol{Q}^{-1}$，有 $(A, B, C)\boldsymbol{Q} = \beta$，$\beta^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}} (A, B, C)^{\mathsf{T}}$，进而

$$(A, B, C) \begin{pmatrix} a^2 & & \\ & b^2 & \\ & & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \beta \boldsymbol{P}^{-1} \beta^{\mathsf{T}}.$$

又注意到 $\det(\boldsymbol{P}) = \dfrac{1}{a^2 b^2 c^2}$，则有 $\dfrac{\beta \boldsymbol{P}^{-1} \beta^{\mathsf{T}}}{a^2 b^2 c^2} = \beta \boldsymbol{P}^* \beta^{\mathsf{T}}$，从而可知 $r_{\max} \cdot r_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{\beta \boldsymbol{P}^* \beta^{\mathsf{T}}}}$，进而截面椭圆面积为

$$\pi r_{\max} \cdot r_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta \boldsymbol{P}^* \beta^{\mathsf{T}}}}.$$

笔记 本题做法相当巧妙！利用几何性质挖掘出截面实际上是椭圆，进一步转化成研究这个椭圆的性质，则首先自然想到去计算长短半轴，因此就可以转化成到中心的最大最小距离，但中心不确定，因此想到利用正交变换，将椭圆面“平移旋转”到原点，因此再用条件极值，一气呵成，非常精彩！

命题 5.14 (摄动法思想的运用，好题！)

设 $u(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上二阶连续可微，在 $x^2 + y^2 < 1$ 上满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u,$$

且在 $x^2 + y^2 = 1$ 上 $u(x, y) > 0$，证明：当 $x^2 + y^2 \leq 1$ 时 $u(x, y) > 0$.

证明 我们的证明主要分成两部分，第一部分我们先证明有 $u \geq 0$ 恒成立，反证法，则存在 $(x_0, y_0) \in D^\circ$ 使得 $u(x_0, y_0) < 0$，从而考虑连续函数在 D 上的最小值 $U(X_1) < 0$，而又此时在该点处 Hesse 矩阵半正定，即 $\boldsymbol{H}_u(X_1)$ 正定，从而有

$$0 < \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_u(X_1)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_1) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(X_1) = u(X_1) < 0,$$

显然矛盾！从而我们有 $u(X)\ge 0$ 在 D 上恒成立，下用**摄动法的思想**改进为 >0.

注意到二元函数 $f(x,y)=\exp\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$ 是一个符合题意的 u 的解，从而对任意 u，注意到 u,f 均为 ∂D 上的连续函数，从而 u 有最小值 $m>0$，f 有最大值 M，从而考虑 $\widehat{u}=u-\frac{m}{2M}\cdot f$，从而可知 $\widehat{u}$ 也满足题给方程以及在边界上大于 0，因此根据第一部分的结果，我们有

$$\widehat{u}(X)\ge 0,\quad \forall X\in D\Longrightarrow u(X)\ge \frac{m}{2M}f(X)>0,\quad \forall X\in D,$$

从而我们证明了 $u(x,y)>0$，即完成了证明.

笔记 本题是一个运用摄动法的好题，首先得到 u 非负是几乎 trivial 的，但是停留在 u 本身是无法做进一步改进的，因此借助满足题给条件的特殊解 f，就可以得到一系列的解，则这些解可以逼近 u 从而实现证明.

这也可以归纳出一般加强命题的思路，即引入流动参数使得从少数的元素扩展得到无穷多个元素，这些元素可以去逼近原来的元素，从而将性质进行传递.

注 5.5.1

有趣的是，在码完这个题的第二天的**数学分析 II 期末**压轴就出现了一个类似的题目：
设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$，称 $f(x,y)\in C^2(D)$ 是“优雅的”，若其有界恒正，且满足

$$\Delta\ln f(x,y)\ge f^2(x,y),\quad \forall (x,y)\in D,$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 表示 Laplace 算子，则对所有“优雅的”$f(x,y)$，求

$$\iint_D \exp\left(\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的最小可能值.

笔记 这个题的思路跟上题不能说毫不相关只能说是一摸一样，但是上一题难度更大一些，本题只停留在第一部分. 但是需要注意的是，这个问题也需要发现特解函数 $g(x,y)=\frac{2}{1-x^2-y^2}$，这也是最大值的取等情形，发现这一点需要一些 PDE 的技巧，难度也还是较大的.

命题 5.15 (B 组 15 题)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界开区域，$u(X)\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$，若

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(X)+\sum_{i=1}^n b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\ge 0,\quad \forall X\in\Omega,$$

其中 $b_i(X)(1\le i\le n)$ 均为连续函数，求证：

$$u(X)\le \max_{X\in\partial\Omega}u(X),\quad \forall X\in\Omega.$$

证明 内容...

第 6 章 流形上的微分学

内容提要

- 清华大学刘思齐教授课件
- Analysis on Manifolds,Chpater 5,Munkers

6.1 $\mathbb{R}^n$ 中的流形

第 7 章 数项级数

7.1 Du Bois-Reymond 判别法和 Dedekind 判别法

Du Bois-Reymond 判别法和 Dedekind 判别法分别是 Abel 判别法和 Dirichlect 判别法的推广，能适用于更广范围的级数.

定理 7.1 (Du Bois-Reymond 判别法)

设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 由 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛，从而设 $A=\sum_{n=2}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$，又由 $|a_n| \le |a_n-a_1|+|a_1| = |\sum_{k=2}^{n}(a_n-a_{n-1})|+|a_1| \le A+|a_1|$. 进而由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，可知任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，对任意 $m>N$，$p\in\mathbb{N}$，有 $\left|\sum_{k=m}^{m+p} b_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2A+|a_1|}$.

故由 Abel 恒等式：

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=m}^{m+p} a_k b_k\right| \\
&= |(a_m-a_{m+1})b_m + (a_{m+1}-a_{m+2})(b_m+b_{m+1}) + \cdots \\
&\quad + (a_{m+p-1}-a_{m+p})(b_m+\cdots+b_{m+p-1}) + a_{m+p}(b_m+\cdots+b_{m+p})| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2A+|a_1|}\left(\sum_{k=m}^{m+p}|a_k-a_{k-1}|\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

故由 Cauchy 收敛原理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

笔记 Abel 判别法的条件中，要求了 $\{a_n\}$ 单调有界，容易看到，本题的条件要求弱于这个，从而本判别法要强于 Abel 判别法，这就可以解决很多数列没有单调性的情形，相当于大跨步的推进了结论，比如下面一例题.

命题 7.1

判断下面级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{\frac{\cos 1}{1^2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}}.$$

证明 一方面由 $\frac{2}{\pi}$ 为无理数，从而可知 $\left\{n^2\frac{2}{\pi}\right\}$ 在 $[0,1)$ 上稠密，故可知存在子列 $\{n_k\}$，$\{n_t\}$，使得 $\lim_{k\to\infty}\sin n_k^2 \to 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}\sin n_t^2 \to 1$，从而可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散.

而注意到 $\frac{\cos 1}{1^2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}$ 绝对收敛，从而由 Du Bois-Reymond 判别法可知若原级数收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 收敛，矛盾！从而级数发散.

注 需要证明分母不为 0，这个需要适当的放缩，这里略去不证明.

定理 7.2 (Dedekind 判别法)

设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界 B，从而可知任意 $m,p\in\mathbb{N}^*$，有 $|b_m+\cdots+b_{m+p}|\le 2B$，由级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，可知存在 N 使得任意 $m>N$，有 $\sum\limits_{k=m}^{m+p}|a_k-a_{k-1}|<\dfrac{\varepsilon}{4B}$，$|a_m|<\dfrac{\varepsilon}{4B}$.

从而由 Abel 恒等式：

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=m}^{m+p}a_kb_k\right|\\&=|(a_m-a_{m+1})b_m+(a_{m+1}-a_{m+2})(b_m+b_{m+1})+\cdots\\&\quad+(a_{m+p-1}-a_{m+p})(b_m+\cdots+b_{m+p-1})+a_{m+p}(b_m+\cdots+b_{m+p})|\\&\le\frac{\varepsilon}{4B}\cdot 2B+\frac{\varepsilon}{4B}\cdot 2B=\varepsilon\end{aligned}$$

故由 Cauchy 收敛原理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

笔记 这个加强的版本和 Du Bois-Reymond 判别法的加强是类似的，不再赘述.

7.2 Hardy 不等式

定理 7.3 (Hardy(哈代) 不等式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数，则对 $p>1$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{1/p}\right)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

命题 7.2 (补充问题)

这是 Hardy 不等式 (p-幂平均) 不涉及的一个情形 (调和平均)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 为收敛的正项级数，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛，事实上成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

证明 我们先证明 Hardy 不等式：

我们令 $x_n=a_n^{1/p}$，则下面证明对任意正整数 n 均有：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}x_k^p,$$

记 $S_n=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}x_i$，从而我们联想上式，直觉告诉我们要利用 Holder 不等式，因此我们先需要把幂次降低，同时开上 $\dfrac{1}{p}$ 次，则等价于 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}S_k^p\right)^{1/p}\le\dfrac{p}{p-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{1/p}$，为了配凑出 Holder 不等式的形状，我们自然想到同时

乘上 $\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^p\right)^{1-1/p}$，即相当于要证明下面这个式子 (为了理解思路这里用分析法证明):

$$\sum_{k=1}^{n} S_k^p \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^p\right)^{1-1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p},$$

从而对右式用 Holder 不等式可知,

$$\frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^p\right)^{1-1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \geq \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n} x_k S_k^{p-1},$$

因此我们下面将证明:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k^p - \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{n} x_k S_k^{p-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(S_k^p - \frac{p}{p-1}x_k S_k^{p-1}\right) \leq 0.$$

面对这种求和式的估计, 在级数里最常用的手法是借助裂项去进行放缩, 因此我们下一步就是想办法将 $S_k^p - \frac{p}{p-1}x_k S_k^{p-1}$ 进行放缩裂项

$$\begin{aligned}
S_k^p - \frac{p}{p-1}x_k S_k^{p-1} &= S_k^p - \frac{p}{p-1}(kS_k-(k-1)S_{k-1})S_k^{p-1} \\
&= \frac{p(k-1)}{p-1}S_{k-1}S_k^{p-1} - \frac{p(k-1)+1}{p-1}S_k^p \\
&= \frac{p(k-1)}{p-1}\left(S_{k-1}^p\right)^{1/p}\left(S_k^p\right)^{1-1/p} - \frac{p(k-1)+1}{p-1}S_k^p \\
&\leq \frac{p(k-1)}{p-1}\left(\frac{1}{p}S_{k-1}^p + \frac{p-1}{p}S_k^p\right) - \frac{p(k-1)+1}{p-1}S_k^p\,(*) \\
&= \frac{1}{p-1}\left((k-1)S_{k-1}^p - kS_k^p\right)
\end{aligned}$$

其中 (*) 用了加权均值不等式，上述放缩使得我们成功实现了我们裂项的目标，从而补充 $S_0=0$，则可知

$$\sum_{k=1}^{n}\left(S_k^p - \frac{p}{p-1}x_k S_k^{p-1}\right) \leq \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{n}\left((k-1)S_{k-1}^p - kS_k^p\right) = -\frac{1}{p-1}\cdot nS_n^p < 0$$

从而令 $n\to\infty$ 可知我们完成了 Hardy 不等式的证明.

注 这里系数 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ 是最优的，特别的可以取 $a_k\to\frac{1}{k}(1\leq k\leq n)$，$a_t=0(t>n)$，再令 $n\to\infty$ 则可知取等.

笔记 需要特别指出的是，当 $p\to\infty$ 时，$p-$ 幂平均变成了几何平均，且 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\to\mathrm{e}$，这便得到了 **Carleman(卡莱曼)** 不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

进一步，王永喜老师在中等数学模拟题曾给出 Carleman 不等式的加细如下:

命题 7.3

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数，记 $M_n=\max_{1\leq k\leq n}\sqrt{kx_k}$，$m_n=\min_{1\leq k\leq n}\sqrt{kx_k}$，从而成立

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(M_n-m_n)^2}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

关于补充问题的证明，核心在于发现局部不等式 (事实上是待定系数法配凑的)

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{4}{n(n+1)^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}.$$

这里略去细节，关于 Hardy 不等式更多的内容可以参考知乎文章.

7.3 Riemann 重排定理及应用

定理 7.4 (Riemann 重排定理)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则对于任意满足 $-\infty \le A \le B \le +\infty$ 的一对 A，B，可以改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项的顺序，使得重排之后的级数的部分和数列 $\{S'_n\}$ 满足：

$$\varliminf_{n\to\infty} S'_n = A,\ \varlimsup_{n\to\infty} S'_n = B.$$

笔记 Riemann 重排定理证明的核心思路在于利用正负相消，由于条件收敛，因此可知级数的正部与负部均发散于无穷，因此可以堆砌若干正项后再减去若干负项，使得部分和分别向 A, B 趋近，最后能够趋近的原因在于，单项 a_n 收敛于 0，因此误差会控制的越来月好. 可以类比这个证明思路解决下面这个问题.

命题 7.4

设 $\{a_n\}$ 是单调递减且收敛于 0 的数列，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，证明：对任意 $-\infty \le A \le +\infty$，存在数列 $\{\varepsilon_n\} \subseteq \{-1, 1\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = A.$$

笔记 可以参考笔者的知乎文章.

下面看三个关于重排的应用例子 (其并不一定与 Riemann 定理有关)：

命题 7.5

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的一个重排，且重排后正项与负项内部的相对顺序不变，又设在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项中有 p_n 个正项，且存在极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = p$，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

证明 我们考虑直接计算 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列：

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p_n - 1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(n-p_n)}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2p_n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-p_n}\right) \\
&= (\ln(2p_n) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln p_n + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(n-p_n) + \gamma + o(1)) \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) + o(1) \to \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)
\end{aligned}$$

综上可知命题得证.

笔记 运用类似的想法可以解决许多类似的问题，核心想法就是在于进行阶的估计，把握整体的极限性质，剩下的就是一些基本的极限语言的叙述.

下面这个题某种意义上是上面这个题的推广，也需要用到阶的估计.

命题 7.6

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}(0<\alpha<1)$ 按照每 p 个正项后为 q 个负项的规则进行重排，且重排后正项与负项内部的相对顺序不变，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & p>q \\ \text{收敛} & p=q \\ -\infty & p<q \end{cases}.$$

证明 为了建立对阶级的估计，我们需要建立一个引理：

引理 7.1

设 $m<n\in\mathbb{N}^*$，且有 $f(x)$ 非负单调递减，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right) = \alpha,$$

存在，且 $0\le\alpha\le f(m)$. 更进一步，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则有：

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x - \alpha\right| \le f(n).$$

设 $a_n=\sum_{k=m}^{n} f(k)-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x(n\ge m)$，从而有 $a_n-a_{n+1}=\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - f(n+1) = f(\xi_n)-f(n+1)>0$，从而可知 $\{a_n\}$ 单调递减，从而有 $a_n\le a_m=f(m)$，而又注意到：

$$a_n=\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x = f(n)+\sum_{k=m}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right)\ge 0,$$

从而可知数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且有下界，从而收敛，且极限 α 显然满足 $0\le\alpha\le f(m)$，引理第一部分即证. 另一部分，一方面：

$$\begin{aligned} a_n-\alpha &= \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{N} f(k) - \int_m^N f(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\int_n^N f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=n+1}^{N} f(k)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\int_{k-1}^{k}[f(x)-f(k)]\,\mathrm{d}x \\ &\le \lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\int_{k-1}^{k}[f(k-1)-f(k)]\,\mathrm{d}x = f(n) \end{aligned}$$

而由 $a_n\ge\alpha$ 可知另一边显然成立，综上即有：$\left|\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x - \alpha\right|\le f(n)$，引理得证！□

回到原题，我们先做适当处理后再利用引理，而不难猜到这个处理就是“整周期化”，对 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和 S_n 设 $n=m(p+q)+r$，从而由 $r<p+q$，故可知 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{m(p+q)+1}+\cdots+a_n=0$，因此即有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n-1)^{\alpha}} - \sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right).$$

而由引理可知我们有阶的估计：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

进而有：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n-1)^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{2mp}\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{n^{\alpha}}\\&=\left(\frac{(2mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C+O\left(\frac{1}{(2mp)^{\alpha}}\right)\right)-\frac{1}{2^{\alpha}}\left(\frac{(mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C+O\left(\frac{1}{(mp)^{\alpha}}\right)\right)\\&=\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{(mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)C+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

同理我们可以得到：

$$\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}=\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2^{\alpha}}\left(\frac{(mq)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right).$$

故有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)}a_n\\&=\lim_{m\to\infty}\left\{\left[\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{(mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)C+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right]-\left[\frac{1}{2^{\alpha}}\left(\frac{(mq)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right)\right]\right\}\\&=\lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{p^{1-\alpha}-q^{1-\alpha}}{2^{\alpha}(1-\alpha)}\right)\cdot m^{1-\alpha}+\left(1-2^{1-\alpha}\right)C+O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right]\\&=\begin{cases}+\infty & p>q\\ \text{收敛} & p=q\ \text{，特别地，当收敛时，收敛的值为}\left(1-2^{1-\alpha}\right)C.\\ -\infty & p<q\end{cases}\end{aligned}$$

综上我们完成了这道比较困难问题的证明.

笔记 本题用到的主要思想还是比较朴素的，就是直接进行阶的估计，暴力但干脆利落，这在很多级数估计的问题里面都将展现巨大的威力.

下面的问题是关于重排级数收敛数值的一个不精细但深刻的结论：

命题 7.7

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{f(n)}=t$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的一个重排. 若 $t\neq s$，证明：对于任意 N，存在 n 使得 $|n-f(n)|>N$.

证明 反证法，若存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得任意 n 均有 $|n-f(n)|<N$，则 k 一定在 $f(1),f(2),\cdots,f(k+N)$ 中出现，若不然，则有 $k=f(j)>j-N>k$ 矛盾！从而任意 $\varepsilon>0$，存在 N_1 使得任意 $n>N_1$，均有 $a_n<\frac{\varepsilon}{N}$，从而可知任意 $n>N_1+N$，有：

$$\left|a_1+\cdots+a_{n+N}-a_{f(1)}-\cdots-a_{f(n)}\right|=|a_{n_1}+\cdots+a_{n_N}|,$$

其中 $\min\limits_{1\le k\le N}n_k\geq n-N>N_1$，故有 $|a_{n_1}+\cdots+a_{n_N}|<N\cdot\frac{\varepsilon}{N}$，从而可知：$\left|a_1+\cdots+a_{n+N}-a_{f(1)}-\cdots-a_{f(n)}\right|<\varepsilon$，令 $n\to\infty$，结合 ε 的任意性，则可知 $s=t$，矛盾！

笔记 这表明，对于条件收敛级数作重排时，如果每一项的新位置与原有位置之差不超过某个界限的话，则级数的和不会改变. 这个性质某种程度上也反映了重排级数的新顺序越乱，与原级数相差越大.

这个证明过程也体现了极限的思想，对趋向无穷的问题，有限项的限制总是可以大胆操作的，只要保证大体的趋向性质不变即可.

7.4 级数的乘法

定理 7.5 (Mertens(梅尔滕斯) 定理)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB,$$

其中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$，为对角线形式求和.

证明 我们记 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$，$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$，从而我们为了拼凑出 AB 的形式，我们有：

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n} c_k (\text{我们按对角线形式求和展开}) \\ &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \end{aligned}$$

进一步我们引入余项来估计和 AB 的误差，设 $\beta_n = B - B_n$，从而易见 $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$，故有

$$\begin{aligned} C_n &= a_1(b_1 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \\ &= a_1(B - \beta_n) + a_2(B - \beta_2) + \cdots + a_n(B - \beta_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B - (a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1) \end{aligned}$$

而事实上注意到设 $\alpha_{n,k} = \dfrac{|a_k|}{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}$，利用绝对收敛可知 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = 1$，从而由 Toeplitz 定理可知：

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_{n,1}|\beta_1| + \cdots + \alpha_{n,k}|\beta_k| + \cdots \alpha_{n,n}|\beta_n|) = \lim_{n\to\infty} |\beta_n| = 0,$$

进而有

$$\lim_{n\to\infty} (a_1\beta_n + \cdots + a_n\beta_1) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n,1}|\beta_1| + \cdots + \alpha_{n,k}|\beta_k| + \cdots \alpha_{n,n}|\beta_n|) = 0.$$

从而可知 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = AB$，即证 Mertens 定理.

笔记 需要注意的是，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，则无论按什么什么方式求和，极限均为 AB，这是由于绝对收敛的级数不会因为重排而改变级数值，但对于 Merterns 定理，仅仅适用于对角线式求和 (Cauchy 乘积)，且容易构造出其不绝对收敛的例子.

下面来看一个具体的应用 (这是一个非常困难的问题)：

命题 7.8

讨论下面两个级数 Cauchy 乘积的敛散性，其中 $\alpha > 0, \beta > 0.$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\beta}.$$

证明 我们先证明：当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时发散，事实上，此时我们可以证明 c_n 的极限甚至不为 0.

设 $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}$，从而有

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta} > \frac{n}{n^\alpha \cdot n^\beta} \geq 1.$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散 (单项极限不为 0). □

我们下面证明当 $\alpha+\beta>1$ 时，Cauchy 乘积收敛，有了上一部分的经验，我们先验证此时 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. 我们为了得到更精确的估计，我们分段放缩，自然的想法是"拦腰截断"，在中间断开进行估计：

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}\\
&= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta} + \sum_{k=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}\\
&\leq \frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}
\end{aligned}$$

而由前面已经得到的积分估计，我们可以得到进一步阶的估计：

$$\frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \begin{cases}\frac{M}{n^{\alpha+\beta-1}} & \alpha\neq 1\\ \frac{M}{n^\beta}\ln n & \alpha = 1\end{cases}, \quad \frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta} \leq \begin{cases}\frac{M}{n^{\alpha+\beta-1}} & \beta\neq 1\\ \frac{M}{n^\alpha}\ln n & \beta = 1\end{cases}.$$

从而由 $\alpha+\beta>1$ 可知 c_n 收敛于 0. 下面证明原题，这里给出一个一般的结论：

引理 7.2 (Pringsheim 定理)

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为正项单调递减趋于 0 的数列，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = B$ 的 Cauchy 乘积为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$，则下面三个命题等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 收敛； (2) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$； (3) $\lim_{n\to\infty} A_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_nB_n = 0$，其中 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

我们先证明 (2) 与 (3) 的等价性，一方面若 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$，则由 $0 < A_nb_n < c_n$ 可知 $\lim_{n\to\infty} A_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_nB_n = 0$. 下证明 (3) 蕴含 (2)(级数中一般证明单调性的"反向命题"，都可以考虑越界放缩 $n\to 2n$):

注意到

$$0 < c_{2n+1} = a_1b_{2n+1} + \cdots + a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{2n+1}b_1 \leq A_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} + a_nB_n \to 0,$$

$$0 < c_{2n} = a_1b_{2n} + \cdots + a_nb_{n+1} + a_{n+1}b_n + \cdots + a_{2n+1}b_1 \leq A_nb_n + a_nB_n \to 0.$$

下证明 (1) 与 (2) 互相蕴含，(1) 蕴含 (2) 是平凡的，下证另一个方向：

记部分和：$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k = R_n \to R$，$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k = T_n \to T$，$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}c_k = S_n$. 从而容易看见有 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}c_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_kT_{n+1-k}$，进而我们利用这个估计 $|R_nT - S_n|$:

$$|R_{2n}T - S_{2n}| = |a_1(T-T_{2n}) + \cdots - a_{2n}(T-T_1)| \leq a_1|T-T_{2n}| + \cdots + a_{2n}|T-T_1|,$$

而由单调性容易证明 $|T-T_k| \leq b_k$(进行正负配对再去绝对值)，从而代入即有 $|R_nT - S_n| \leq c_{2n}$，则可知收敛于 0，同理奇数的情形，因此我们证明了 (1)(证明的过程核心难点在于单调性的放缩). 从而原题得证. □

笔记 非常困难的问题，当然第二部分的证明也可以利用阶的估计，需要很强的技巧且并不本质，略去.

7.5 Euler-Maclaurin 公式

Euler-Maclaurin 公式是研究级数部分和确定值的一个强有力工具，现如今广泛被运用在数列极限的加边与估计阶数的问题中，其一般形式如下

定理 7.6 (Euler-Maclaurin 公式)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上解析，对 $a,b\in\mathbb{N}^*$，设 B_{2k} 为 Bernoulli 数，则我们有

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right].$$

对于这个 formula 的证明，常见的方法是利用分部积分，通过递推的思想搭建出 Bernoulli 函数，进而产生公式中的展开，如知乎文章中所证明那样，但为了更本质的理解 Bernoulli 数的来源，我们宁愿牺牲掉一部分严谨性，去考虑“形式上”的证明.

我们首先考虑函数空间 $V=\{f|f\in C^{\infty}(\mathbb{R})\}$，则考虑算子 $E:V\to V, f\mapsto Ef$，满足任意 $x\in\mathbb{R}$，我们有 $Ef(x)=f(x+1)$，从而我们不难得到 $f(a+1)=Ef(a)$，$f(a+2)=E^2f(a)$，进而有 $E^nf(a)=f(a+n)$，因此

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k)=f(a)+Ef(a)+\cdots+E^{b-a-1}f(a)=(I+E+\cdots+E^{b-a-1})f(a),$$

其中 I 为 V 上的恒等算子，从而我们就可以形式上的考虑对算子进行运算

$$I+E+\cdots+E^{b-a-1}=\frac{I-E^{b-a}}{I-E}=(I-E)^{-1}\left(I-E^{b-a}\right),$$

因此我们再返回作用于 $f(a)$ 上即可有

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k)=(I-E)^{-1}\left(I-E^{b-a}\right)f(a)=(E-I)^{-1}\left[f(b)-f(a)\right],$$

其中用到了算子的线性性，则我们下面的目标转化为研究 $(E-I)^{-1}$，为此，我们先引入导数算子 $D:V\to V, f\mapsto Df=f'$，则我们在 x 出作 Taylor 展开，即有

$$f(x+1)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\cdots=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^n}{n!}\right)f(x),$$

这即表明 $E=\mathrm{e}^D$，从而我们可以将算子 $(E-I)^{-1}$ 改写为 $\dfrac{D}{\mathrm{e}^D-1}\cdot D^{-1}$，而我们可以对函数 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ 作 Taylor 展开，这即自然而然的引入了 Bernoulli 数，

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

因此我们可以进一步借助算子运算，将求和处理为

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}D^{2n-1}[f(b)-f(a)]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(a)-f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right],$$

其中用到了 D^{-1} 为积分算子，则进而将等式同时加上 $f(b)$，我们便完成了 Euler-Maclaurin 公式的形式证明.

事实上，在一般的估计中，f 性质稍差，或者无穷项不好处理，我们也可以引入 Gauss 函数与 Bernoulli 多项式得到带余项的 E-M 公式，形式如下，证明可见知乎回答

定理 7.7 (带余项的 E-M 公式)

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]+R_{m+1},$$

其中余项 $R_{m+1}=\dfrac{1}{(2m+1)!}\displaystyle\int_a^b B_{2m+2}(x-[x])f^{(2m+1)}(x)\mathrm{d}x.$

利用上述公式，我们可以得到很多问题的一个轻松解决

命题 7.9 (第十四章 B13)

设 $\alpha\in(0,1)$，$p>\max\{\alpha,1-\alpha\}$，证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{\alpha}}{n^{p}}$ 收敛.

证明 我们考虑一阶余项的 E-M 公式，即

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+\frac{f(1)+f(n)}{2}+\int_1^n(x-[x])f'(x)\mathrm{d}x,$$

代入题目中的函数，我们即有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k^{\alpha}}{k^{p}}=\int_1^n\frac{\sin x^{\alpha}}{x^{p}}\mathrm{d}x+\frac{f(1)+f(n)}{2}+\int_1^n(x-[x])\cdot\frac{\alpha x^{p+\alpha-1}\cos x^{\alpha}-px^{p-1+\alpha}\sin x^{\alpha}}{x^{2p}}\mathrm{d}x,$$

进而我们不难注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$，从而我们只需要估计蓝色部分与红色部分的积分. 一方面，对蓝色积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x^{\alpha}}{x^{p}}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{p+\alpha-1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}u,$$

则由 $\displaystyle\int_1^{\infty}\sin u\mathrm{d}u$ 有界，且由 $\alpha+p-1>0$，从而由 Dirichlect 判别法可知，广义积分收敛.

我们再看红色部分的积分，则首先不难发现

$$|u(x)|:=\left|(x-[x])\cdot\frac{\alpha x^{p+\alpha-1}\cos x^{\alpha}-px^{p-1+\alpha}\sin x^{\alpha}}{x^{2p}}\right|\leq\frac{\alpha+p}{x^{p+1-\alpha}},$$

又由 $p>\alpha$，从而可知 $p+1-\alpha>1$，故有 $\displaystyle\int_1^{\infty}u(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，综上可知，原级数收敛.

7.6 难题选解

命题 7.10

设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_n(n\in\mathbb{N}^*)$.

(1) 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 同敛散性；

(2) 证明：无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛，均有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}(\sigma>0)$ 收敛.

证明 (1) 我们证明两个级数的收敛性可以互相蕴含：

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}<\frac{1}{a_1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，从而可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛，反证法，若 $\{S_n\}$ 发散，则任意 $n\in\mathbb{N}^*$，存在 p_n 使得 $\frac{b_{n-1}}{b_{n+p}}<\frac{1}{2}$，故存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ 使得对任意 $m\in\mathbb{N}^*$，存在 p_m，即有

$$\frac{a_m}{S_m}+\cdots+\frac{a_{m+p_m}}{S_{m+p_m}}>\frac{S_{m+p_m}-S_{m-1}}{S_{m+p_m}}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的 Cauchy 收敛原理矛盾！

笔记 ♣ 第一小问给我们带来的启示是在证明许多反向更强的命题的时候，需要考虑反证法去利用 $\varepsilon-\delta$ 语言回归本质进行论述 (因为相比于任何一种放缩估计，极限语言是最“紧”的估计).

♠ 第一小问还有许多等价形式，通过适当的换元不难证明它们的等价性：

(i) 设正项数列 $\{b_n\}$ 单调递减，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 的充要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)$ 发散；

(ii) 设正项数列 $\{c_n\}$ 单调递增，则该数列与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{c_n}{c_{n+1}}\right)$ 具有相同的敛散性.

需要强调的是，形式 (i) 又被称为 **Sapagof** 判别法，在面对一些复杂数列极限为 0(尤其是长分式) 时，可以利用相邻两项相除进而产生一个更容易去判别的正项级数的敛散性，后面的题目中 (或许) 会涉及到这个方法.

证明 (2) 注意到若若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则问题是平凡的，从而若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散到 $+\infty$，我们去考虑利用不等式进行估计，首先注意到对 $x^{-\sigma}$ 由 Lagrange 中值定理可知，存在 $\xi_n\in(S_{n-1},S_n)$ 满足：

$$\frac{\frac{1}{S_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{S_n^{\sigma}}}{S_{n-1}-S_n}=\frac{-\sigma}{\xi_n^{1+\sigma}},$$

从而可知 $\frac{a_n}{\xi_n^{1+\sigma}}=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{S_n^{\sigma}}\right)$，而由 $\frac{a_n}{\xi_n^{1+\sigma}}>\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$，可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}<\frac{1}{a_1^{\sigma}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{S_n^{\sigma}}\right)=\frac{1+\sigma}{\sigma}\cdot\frac{1}{a_1^{\sigma}}.$$

即可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$ 收敛，即证！

笔记 第二小问给我们的启示是，当遇到一些幂次很奇怪 (比如只要比某个数大一点点，$p+\varepsilon$ 这样的) 可以考虑去利用中值定理进行精细化处理，或者转化成积分进行裂项放缩，这也是一个很重要的想法.

命题 7.11

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数，数列 $\{na_n\}$ 单调，证明：

$$\lim_{n\to\infty} na_n \ln n = 0.$$

证明 显然 $\{na_n\}$ 单调递减，否则存在 $r>0$ 使得，$a_n > \frac{r}{n}$，与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛矛盾！

从而反证法，若不然则不妨设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 4$，从而存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $n_k a_{n_k} > \frac{2}{\ln n_k}(k\in\mathbb{N}^*)$(去掉前面若干不满足的有限项)，从而有：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot na_n \\ &> \frac{2}{\ln n_1}\left(1+\cdots+\frac{1}{n_1}\right)+\frac{2}{\ln n_2}\left(\frac{1}{n_1+1}+\cdots+\frac{1}{n_2}\right)+\cdots \\ &> 2\cdot\frac{\ln n_1-\ln 1}{\ln n_1}+2\cdot\frac{\ln n_2-\ln n_1}{\ln n_2}+\cdots\end{aligned}$$

考虑子列 $\{m_1,m_2,\cdots\}\subseteq\{n_1,n_2,\cdots\}$ 且使得 $m_k > m_{k-1}^2$，其中 $m_1=n_1$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &> 2\cdot\frac{\ln n_1-\ln 1}{\ln n_1}+2\cdot\frac{\ln n_2-\ln n_1}{\ln n_2}+\cdots \\ &> 2\cdot\frac{\ln m_1}{\ln m_1}+2\cdot\frac{\ln m_2-\ln m_1}{\ln m_2}+\cdots \\ &> 2+\sum_{n=1}^{\infty} 1\end{aligned}$$

这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛矛盾！即证.

笔记 一般面对比较抽象的数列，却需要结合具体的阶进行估计，往往需要结合反证法.

命题 7.12

证明：若 $p\le 1$，则下面级数发散：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\ln n)}{n^p}.$$

证明 我们先证明：$\left\{\frac{2}{\pi}\ln n\right\}$ 在 $[0,1)$ 上稠密，其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，设 $x_n = \frac{2}{\pi}\ln n$，从而容易证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$； (2) 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 和任意正整数 N，存在 $m,n>N$，使得 $|x_m-x_n|>1-\varepsilon$.

从而只需证明对任意 $(a,b)\subseteq(0,1)$，存在 x_k 使得 $\{x_k\}\in(a,b)$，设 $\varepsilon=b-a$，则由条件 (1)(2) 可知存在 $m<n$ 使得 $|x_m-x_n|>1-\varepsilon$，且任意 $k>m$，均有 $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$. 进而不妨假设 $x_m<x_n$，从而可知一定存在 $l\in\mathbb{Z}$ 使得 $[x_m,x_n]\bigcap(l+a,l+b)=\varnothing$(这是由于考虑 $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}}(l+a,l+b)$ 相邻区间的间隙为 $1-\varepsilon$).

进而我们断言，一定存在 $m\le k\le n$ 使得 $x_k\in(l+a,l+b)$，若不然，则有 $x_m\le l+a$，$x_n\ge l+b$，设 $j=\max\{k|x_k<l+a\}$，则 $j\le n-1$，且 $x_{j+1}\ge l+b$，从而可知 $|x_{j+1}-x_j|>\varepsilon$，矛盾！综上我们有 $\left\{\frac{2}{\pi}\ln n\right\}$ 在 $[0,1)$ 上稠密.

从而注意到 $\ln 2<\frac{\pi}{2}$，从而设 $\alpha=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{6}-\frac{\ln 2}{3}$，记 $\varepsilon_0=\min\{\sin\alpha,\cos(\beta+\ln 2)\}\cdot\begin{cases}\frac{2^{1-p}}{1-p} & p<1\\ \ln 2 & p=1\end{cases}$，则对任意 $N\in\mathbb{N}^*$，由 $\left\{\frac{2}{\pi}\ln n\right\}$ 在 $[0,1)$ 上稠密，一定存在 $n>N$，$m\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\{x_n\}\in\left(\frac{2}{\pi}\beta-\frac{\beta-\alpha}{m},\frac{2}{\pi}\beta\right)\subseteq\left(\frac{2}{\pi}\alpha,\frac{2}{\pi}\beta\right)$，

进而设 $\ln n = \frac{k\pi}{2} + \theta(\theta \in (\alpha, \beta))$，从而

$$\ln(2n) = \ln n + \ln 2 < \frac{k\pi}{2} + \beta + \ln 2 < \frac{(k+1)\pi}{2},$$

进而 $\cos(\ln k)(n \le k \le 2n)$ 同号，且容易看见有

$$m = \min_{n \le k \le 2n} |\cos(\ln k)| = \min\{\sin\alpha, \cos(\beta + \ln 2)\},$$

因此我们有估计：

$$\begin{aligned}\left|\frac{\cos(\ln n)}{n^p} + \cdots + \frac{\cos(\ln 2n)}{(2n)^p}\right| &= \frac{|\cos(\ln n)|}{n^p} + \cdots + \frac{|\cos(\ln 2n)|}{(2n)^p} \\ &\ge m\left(\frac{1}{n^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}\right) \\ &> m \cdot \begin{cases} \dfrac{2^{1-p}}{1-p} & p < 1 \\ \ln 2 & p = 1 \end{cases} = \varepsilon_0\end{aligned}$$

其中最后一步放缩利用了积分估计，从而由 Cauchy 收敛原理知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 发散.

笔记 (1) 本题的一个想法就是利用 Cauchy 收敛定理去反证，但这就需要进行一些估计，从而联想到用稠密性进行估计，这是一个朴素且关键的想法，进一步的本题中证明稠密性的部分是一般的，特别地其在第二章中就已经出现过，这里补充了证明；

(2) 这里的许多估计比较精细，但大体上的操作思路是平凡的.

第 8 章 广义积分

8.1 构造积分证明不等式

积分是一个可以将离散量连续化的方法，因此对很多离散难以把握的问题，我们可以适当地将其转化成积分，从而利用积分的线性性，在积分算子内进行运算，从而可以产生配方的效果，进而解决不等式问题，下面是一些应用的例子：

前两个例子来自于高等代数，我们熟知在 Euclid 空间中，一组基的度量矩阵一定是正定的：

$$X^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i\right) \geq 0,$$

因此为了证明某些矩阵是正定的，只需要恰当的构造 Euclid 空间与其上的内积结构即可，下面便是两个借助积分构造内积结构的例子，其中第二个构造是非常有价值和创造性的.

命题 8.1

设 $a_1,\cdots,a_n$ 为互不相同的正实数，证明矩阵 $\left(\dfrac{1}{a_i+a_j}\right)_{n\times n}$ 正定.

证明 我们探索什么样的结构会得出分母上相加，我们自然想到幂次相乘就可以转化成相加，进而如果是积分，那么就可以转化到分母上，因此我们考虑 $C[0,1]$ 的一个 n 维线性子空间：

$$V = \operatorname{span}\left(x^{a_1-\frac{1}{2}}, x^{a_2-\frac{1}{2}}, \cdots, x^{a_n-\frac{1}{2}}\right),$$

我们定义内积结构 $(,)$ 表示任意 $f(x), g(x) \in V$，有

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

因此容易验证其具有对称性，线性性及正定性，因此容易看到 (视积分为 0 处的瑕积分)，其度量矩阵即为

$$\left(\int_0^1 x^{a_i+a_j-1}\mathrm{d}x\right)_{n\times n} = \left(\frac{1}{a_i+a_j}\right)_{n\times n}.$$

下面这个题是上面这个问题的推广，但构造却阴间许多：

推论 8.1

设 $a_1,\cdots,a_n$ 为互不相同的正实数，证明矩阵 $\left(\dfrac{1}{(a_i+a_j)^p}\right)_{n\times n}$ 正定，其中 $p>0$.

证明 注意到 Γ 函数的性质，我们有：

$$\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^p}\cdot\int_0^{\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p-1)}{a^p}.$$

因此我们可以考虑 $C[0,\infty)$ 上的一个 n 维线性子空间：

$$V = \operatorname{span}\left(\mathrm{e}^{-a_1 t}, \mathrm{e}^{-a_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{-a_n t}\right),$$

我们定义内积结构 $(,)$ 表示任意 $f(t), g(t) \in V$，有

$$(f(t), g(t)) = \int_0^{\infty} t^{p-1} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

因此类比上题，我们可以完成证明.

笔记 虽然上面两个问题都套着一层高代代数度量矩阵即正定的外壳，本质上都蕴藏着一个利用积分配方的思想，

如第二题可以换种写法：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{(a_i+a_j)^p}&=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\int_0^{\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-a_it}\right)^2\mathrm{d}t\geq 0\end{aligned}$$

积分既然是将离散的连续化，那么显然可以在很多离散的量产生刻画效果，比如两个数的较大者或较小者，以及两个数的绝对值之差，如下面这个问题：

命题 8.2 (CTST 试题)

已知 $x_1,\cdots,x_m$，$y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{R}^+$，记 $X=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$，$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，证明：

$$2XY\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}|x_i-y_j|\geq X^2\sum_{1\leq i,j\leq n}|y_i-y_j|+Y^2\sum_{1\leq i,j\leq m}|x_i-x_j|.$$

证明 设 $x,a>0$，则我们定义 $f_a(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,a]\\0 & x\in(a,+\infty)\end{cases}$，从而我们容易看见：

$$|a-b|=a+b-2\min\{a,b\}=a+b-2\int_0^{\infty}f_a(x)f_b(x)\mathrm{d}x.$$

进而我们有：

$$\begin{aligned}2XY\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}|x_i-y_j|&=2XY\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}\left(x_i+y_j-2\int_0^{\infty}f_{x_i}(x)f_{y_j}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=2XY(nX+mY)-4XY\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}\left(\int_0^{\infty}f_{x_i}(x)f_{y_j}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=2XY(nX+mY)-4XY\int_0^{\infty}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}f_{x_i}(x)f_{y_j}(x)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

类似地也有：

$$\begin{aligned}X^2\sum_{1\leq i,j\leq n}|y_i-y_j|&=X^2\sum_{1\leq i,j\leq n}\left(y_i+y_j-2\int_0^{\infty}f_{y_i}(x)f_{y_j}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=2nX^2Y-2X^2\int_0^{\infty}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}f_{y_i}(x)f_{y_j}(x)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

同理有 $Y^2\sum\limits_{1\leq i,j\leq m}|x_i-x_j|=2mY^2X-2Y^2\int_0^{\infty}\left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq m}f_{x_i}(x)f_{x_j}(x)\right)\mathrm{d}x$，因此由：

$$X^2\int_0^{\infty}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}f_{y_i}(x)f_{y_j}(x)\right)\mathrm{d}x+Y^2\int_0^{\infty}\left(\sum_{1\leq i,j\leq m}f_{x_i}(x)f_{x_j}(x)\right)\mathrm{d}x-2XY\int_0^{\infty}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}f_{x_i}(x)f_{y_j}(x)\right)\mathrm{d}x$$

$=\int_0^{\infty}\left[X\sum\limits_{i=1}^{n}f_{y_i}(x)-Y\sum\limits_{i=1}^{m}f_{x_i}(x)\right]^2\mathrm{d}x\geq 0$，即可得证原不等式！ □

8.2 广义积分的计算

我们首先来看一类有特殊技巧的广义积分:

命题 8.3 (倒代换法转化结构)

计算广义积分，其中 $\beta\gamma = 2\alpha + 2$，$p$ 为奇数，

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha (\ln x)^p}{(1+x^\beta)^\gamma} dx.$$

证明 我们将积分区间划分为 $[0,1] \bigcup [1,+\infty)$，从而我们注意到，在 $x>1$ 时，令 $t=\frac{1}{x}$，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha (\ln x)^p}{(1+x^\beta)^\gamma} dx = \int_0^1 \frac{t^{\beta\gamma-\alpha-2}(-\ln t)^p}{(1+t^\beta)^\gamma} dt = -\int_0^1 \frac{t^\alpha (\ln t)^p}{(1+t^\beta)^\gamma} dt,$$

则可知原广义积分值为 0.

笔记 当注意到题目广义积分上下限为 $[0,+\infty)$ 且函数内部有 $\ln x$ 的结构时，就可以考虑尝试分离出题目中的结构，从而简化运算，比如可以计算

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin \frac{t}{\sqrt{t-1}}} \ln(t-1)}{t\sqrt{t-1}} dt.$$

下面将借助几类特殊的广义积分来解决问题

定理 8.1 (Froullani(伏汝兰尼) 积分)

设 $f(x)$ 在 $[0.+\infty)$ 上连续，且 $f(+\infty)$ 存在且有限，对 $0<a<b$，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = [f(0)-f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}.$$

证明 对任意 $0<m<M$，有

$$\begin{aligned}
\int_m^M \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx &= \int_{am}^{aM} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{bm}^{bM} \frac{f(t)}{t} dt \\
&= \int_{am}^{bm} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aM}^{bM} \frac{f(t)}{t} dt = \int_a^b \frac{f(mt)}{t} dt - \int_a^b \frac{f(Mt)}{t} dt \\
&= \int_a^b \frac{f(mt)-f(Mt)}{t} dt = [f(m\xi)-f(M\xi)] \ln \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

其中最后一个等号用到了积分第一中值定理，且 $\xi \in (a,b)$，从而由连续性，令 $m \to 0^+$，$M \to +\infty$ 即证.

笔记 在上述证明过程中，如果我们适当改变条件，则可以得到两个变形:

- 若 $x \to +\infty$，$f(x)$ 没有有限极限，但存在 $A>0$ 使得 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛，则
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a};$$
- 若 $x \to 0^+$，$f(x)$ 没有有限极限，但存在 $A>0$ 使得 $\int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛，则
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(+\infty) \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

上面两个推论命题的证明主要是对原证明中 $\int_{am}^{bm} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aM}^{bM} \frac{f(t)}{t} dt$ 用 Cauchy 收敛定理进行修改.

利用类似地思想我们可以计算一个有趣的小题:

- 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$，则对任意 a,b 有
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a)-f(x+b)]\, dx = (a-b)(A-B).$$

综上，这种先算定积分，利用定积分技巧转化后再取极限的技巧十分经典，需深刻体会.

命题 8.4

计算下面两个广义积分:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}\mathrm{d}x.$$

解 只需注意到第一个作换元 $t=\ln x$，第二个积化和差即可运用 Froullani 积分.

定理 8.2 (Dirichlet(狄利克雷) 积分)

我们有积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

证明 常规证法，利用 Dirichlet 核

我们注意到

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

从而由 Riemann 引理，且由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)=0$ 知 $f(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 可积，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=0.$$

从而我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

笔记 这种证法的核心在于利用将积分的上限转化到分母上而分子不变，这也是 $\frac{\cdot}{x}$ 型积分的一个特点.

证明 神奇证法，转化为二重积分

我们只需要注意到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\frac{1}{x},\quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{1+y^2}$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

笔记 这里不加证明的认定了本题的二重广义积分可以交换顺序，这一细节将后面进行补充，这里能进行转化的关键是发现了两个重要的含参广义积分式，这是该种证法的核心妙想.

命题 8.5

计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}\mathrm{d}x.$$

解 我们先顺次通过分部积分证明: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

一方面

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}\left(2x\right)=\frac{\pi}{2},$$

另一方面

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{\sin^4 x}{x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x\left(1-\cos 2x\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

从而同样的借助分分部积分容易转化到上述两种情形，计算得 $\frac{\pi}{3}$.

笔记 通过上述计算，我们一个自然的探索是是否可以计算 $S(m,n)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^m x}{x^n}\mathrm{d}x$，或者特殊的，计算 $S(2^s,2^t)$，一个有价值的结果或许是

$$f\left(x\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cdot\cos ux\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

但它的证明需要用到含参变量积分的知识，将在后续章节中给出.

定理 8.3 (Euler-Possion 积分)

证明下面概率积分：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证明 注意到：

$$1-x^2\le\mathrm{e}^{-x^2}\le\frac{1}{1+x^2},$$

从而我们进一步有

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x\le\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\mathrm{d}x.$$

而对红色积分我们考虑换元 $x=\cos u$，对蓝色积分我们考虑换元 $x=\tan v$，即由夹逼定理转化为

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n!!}{(2n+1)!!}\right)\cdot\sqrt{n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

其中用到了 Wallis 公式，综上我们即证 Euler-Possion 积分.

笔记 另外一种借助二重积分的有趣证法参看下一章重积分的相关内容.

命题 8.6

计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

解 我们先考虑证明一个引理：

引理 8.1

设 $a,b>0$，若广义积分 $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，则有 $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$.

为了保证换元的单调性条件，我们考虑令 $t=ax-\frac{b}{x}$，从而有 $ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}$，则代入即证引理.

从而回到原题，我们可以借助引理计算得

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2ab}\int_0^{+\infty}\exp-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2ab}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(t^2+4ab)}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\cdot\mathrm{e}^{2ab}}.$$

笔记 本题带给我们的最大启示就是在处理换元问题时，借助题给结构变形构造出单调的对偶式时关键.

定理 8.4 (Euler 积分)

我们利用对称性易得

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

关于 Euler 积分有许多不那么明显的变形，这里仅给出其变形形式，不加以计算.

命题 8.7

(1) 注意到 $\mathrm{d}(\ln \sin x) = \cot x \mathrm{d}x$：

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/2} x \cot x \mathrm{d}x.$$

(2) 一个特殊的例子，换元 $x = -\ln \sin t$(这压根想不到，难绷)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}} \mathrm{d}x.$$

定理 8.5 (Fresnel 积分)

我们有 Fresnel(菲涅耳) 积分：

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证明 我们这里先利用复变的方法计算，在含参变量积分中会给出新的证明.

考虑函数 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$，从而易见其在复平面上全纯，从而我们取扇形围道由 $\gamma_1, \gamma_R, \gamma_2$ 组成，其中 $\gamma_1 = \{x | 0 \leq x \leq R\}$，$\gamma_R = \left\{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \middle| 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$，$\gamma_2 = \left\{x + x\mathrm{i} \middle| 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R\right\}$.

8.3 广义积分敛散性的判定

命题 8.8

确定下面广义积分绝对收敛，条件收敛，发散的参数范围：

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x}\sin(\sin(x)) + e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx.$$

解 我们先记

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x}\sin(\sin(x)) + e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right)\frac{e^{\cos x}\sin(\sin(x)) + e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx = I_1 + I_2,$$

且我们注意到分母上的函数具有中心对称性，从而在 $(0, 2\pi)$ 上积分值为 0，故其积分值有界，从而

- 若 $p < 0$

  我们注意到对任意 $k \in \mathbb{N}^*$，有

  $$\int_{2k\pi+\pi/12}^{2k\pi+\pi/6} \frac{e^{\cos x}\sin(\sin(x)) + e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx \geq A \cdot (2k\pi)^{-p} \to +\infty,$$

  其中 A 为某一常数，从而由 Cauchy 收敛准则可知，此时广义积分发散.
- 若 $p = 0$，则此时广义积分值振荡，也即发散.
- 若 $p > 0$，则此时 0 也为瑕点，下面分别讨论 I_1 与 I_2 的敛散性：
  - 当 $x \to 0^+$ 时，有

    $$\frac{e^{\cos x}\sin(\sin(x)) + e^{\sin x}\sin 2x}{x^p} \sim \frac{(e+2)\cdot x}{x^p} = \frac{e+2}{x^{p-1}},$$

    从而可知当 $p - 1 < 1$ 时 I_1 收敛，不变号也即绝对收敛，$p \geq 2$ 时则发散.
  - 由分母积分恒有界，且 $\frac{1}{x^p}$ 单调递减且趋于 0，由 Dirichlet 判别法可知此时 I_1 收敛，因此为了讨论其是否绝对收敛只需考虑 $p < 2(p > 2$ 已有 I_1 发散，不需要考虑)，显然当 $1 < p < 2$ 时，I_2 绝对收敛，当 $0 < p \leq 1$ 时，注意到

    $$\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p} \geq \frac{(\sin 2x)^2}{e \cdot x^p} \sim \frac{1}{x^p},$$

    从而此时可以得出一定发散，即不绝对收敛.

综上我们有 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x}\sin(\sin(x)) + e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx \begin{cases} \text{绝对收敛}, & 1 < p < 2 \\ \text{条件收敛}, & 0 < p \leq 1 \\ \text{发散}, & p \leq 0 \text{ 或 } p \geq 2 \end{cases}.$

笔记 本题容量比较大，比较全面的包含了一些经典的处理办法，属于一个解题模板.

8.4 难题选解

命题 8.9

设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明：$f(+\infty)=0$ 的充要条件为 f 一致收敛.

证明 一方面 $f(+\infty)=0$ 得出一致收敛是平凡且不依赖于广义积分收敛的，证略.

另一方面，对任意 $\varepsilon>0$，由 f 一致收敛，可知存在 $\delta>0$，对任意 $|x_1-x_2|<\delta$，均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，且由广义积分收敛，知存在 $M>0$，任意 $A_1,A_2>M$，均有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\delta$.

故对任意 $x_0>M$，存在 $\xi_0\in(x_0,x_0+\delta)$，使得

$$|f(\xi_0)|\cdot\delta=\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\delta,$$

从而有 $|f(x_0)|\le|f(\xi_0)|+|f(x_0)-f(\xi_0)|<\varepsilon$，从而由 x_0 的任意性，可知 $f(+\infty)=0$，即证.

笔记 本题还是抓住了一致连续问题的核心，从特殊点性质左右平移得到领域内性质.

命题 8.10

设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明：存在数列 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0.$$

证明 我们先证明存在数列 $\{\xi_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n)=0.$$

我们由积分中值定理，则存在 $\xi_n\in(2n,2n+1)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{2n}^{2n+1} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而任意 $\varepsilon>0$，存在 N，任意 $n>N$，有 $|f(\xi_n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，由 Lagrange 中值定理，存在 $x_n\in(\xi_n,\xi_{n+1})$ 使得

$$|f'(x_n)|\le|f'(x_n)|\cdot(\xi_{n+1}-\xi_n)=|f(\xi_{n+1})-f(\xi_n)|<\varepsilon.$$

综上即证存在数列 $\{x_n\}$.

笔记 容易发现，如果增加 k 阶可微的条件，则可以改进为 $f^{(k)}(x_n)\to 0$.

第 9 章 函数项级数与幂级数

9.1 准一致收敛与控制收敛定理

我们已经知道，函数列在满足一致收敛性的条件下，和函数一定能够遗传连续性、可微性和可积性，但事实上，容易看出一致收敛性均仅是充分条件，下面的例子将说明其不是必要的.

命题 9.1 (极限函数连续性与可积性不依赖于函数列的一致连续性)

我们考虑函数列 $\{P_n(x)\} = \{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$，则容易看见其在 $[0,1]$ 上的极限函数为 $P(x) = 0$，从而此时极限函数连续，且可积，更有积分值相等：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 0\mathrm{d}x.$$

但注意到 $P_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，从而函数列并不一致收敛.

因此为了建立函数列连续性与可积性的充分必要条件，我们需要引入一个比一致收敛性稍弱的概念，即准一致收敛性 (Quasiuniform Convergence)：

定义 9.1

称函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上准一致收敛，如果该函数列于 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 $S(x)$，且对任意 $\varepsilon > 0$，$N \in \mathbb{N}$，存在不依赖于 x 的 $N' > N$，使得对于每个 $x \in [a,b]$，存在正整数 $n_x \in [N, N']$，满足

$$|S_{n_x}(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

利用准一致收敛，我们可以给出函数列连续则极限函数连续的充要条件：

定理 9.1 (Arzelá(阿尔泽拉)—Borel 定理)

在区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充分必要条件为函数列在 $[a,b]$ 上准一致收敛.

证明 我们先证必要性，若 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则任意 $n \in \mathbb{N}$，显然 $S_n(x) - S(x)$ 也连续，从而任意给定 $\varepsilon > 0$ 于 N，对 $x_0 \in [a,b]$，存在 $N_0 > N$ 使得任意 $n > N_0$，$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$，从而由连续性可知，存在 $\delta_0 > 0$，使得任意 $n > N_0$，$x \in B(x_0,\delta_0)$，有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. 进而我们有 $B(x_0,\delta_0)\bigcap[a,b]$ 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖，从而存在有限子覆盖设为 $B(x_1),\cdots,B(x_m)$，则取 $N' = \max\{N_1,\cdots,N_m\}$，此时对每个 $x \in B(x_k) \subseteq [a,b]$，存在 $n_x = N_k \in [N,N']$，使得 $|S_{n_x}(x) - S(x)| < \varepsilon$，即函数列准一致收敛.

另一方面，若 $\{S_n(x)\}$ 准一致收敛，我们论证的核心在于对固定的 x，选择一个恰当的 n_x 运用三分法.

选定一点 $x_0 \in [a,b]$，任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得任意 $n > N$，均有 $|S_n(x_0) - S_(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$，从而由准一致收敛性，存在 $N' > N$，故由 $S_N(x) - S(x),\cdots,S_{N'}(x) - S(x)$ 的连续性，可知存在 $\delta > 0$，使得任意 $n \in [N,N']$，$x \in B(x_0,\delta)$，均有 $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

从而对任一 $x \in B(x_0,\delta)$，考虑 $n_x \in [N,N']$，使得 $|S_{n_x}(x) - S(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$，则有

$$|S(x) - S(x_0)| \leq \underbrace{|S(x) - S_n(x)|}_{\text{准一致收敛}} + \underbrace{|S_n(x) - S_n(x_0)|}_{\text{有限个连续函数}} + \underbrace{|S_n(x_0) - S(x_0)|}_{\text{逐点收敛}} < \varepsilon.$$

笔记 三分法是证明“双变量”连续性问题的法宝，核心在于论述对象是单变元的，但我们可以用三分法，引入另一个变元，但巧妙的是，由于左边待估计的是不含新变元的，因此我们只需要选取一个恰当的变元当作桥梁即可，这里也是准一致收敛能判别的重要原因.

下面我们借助集合论里一点浅显的知识，来证明 Riremann 积分意义下的控制收敛定理

定理 9.2 (Arzelá 控制收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 f 的可积函数列. 若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，则成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

需要指出的是，这里“控制收敛”的控制即指函数列可被一个固定的常数限制大小.

为了证明这个条件很弱，结论很强的结果，我们不加证明的给出几个性质与 Lewin(莱温) 引理:

命题 9.2 (基本的准备工作)

下面这些命题都是极容易验证的

- 若 $f\in \mathrm{R}[a,b]$，s 为 $[a,b]$ 上的阶梯函数，则有下式成立，S_* 表示 Darboux 下和，
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=S_*=\sup_{s\le f}\left\{\int_a^b s(x)\mathrm{d}x\right\}.$$
- 设 $\{M_n\}$ 是 $[a,b]$ 内的非空有界闭集序列，且单调下降，即 $M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_n\supset\cdots$，则它们的交集非空，即
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n\neq\varnothing.$$
- 称有限个不交的有界区间的并集 E 为初等集，且称初等集中区间长度之和为 E 的测度，记为 $m(E)$.

我们再给出 Lewin 的结果作为引理，证明可参阅谢惠民下册 P55，其叙述起来是直观的:

引理 9.1 (Lewin 引理)

设 $\{A_n\}$ 为单调下降的有界数集序列，且其交为空集，又定义数列

$$\alpha_n=\sup\{m(E)|E\text{为包含于}A_n\text{中的初等集}\},\quad n=1,2,\cdots$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，即 A_n 包含的任意初等集长度一定趋于 0.

在有了以上的心理准备和基础理论后，我们可以开始 Arzelá 控制收敛定理的证明:

证明 在有了 f 可积的条件下，我们只需要对 $\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f_n-f|$ 进行估计.

对于任意 $\varepsilon>0$，我们定义集合序列

$$A_n=\{x\in[a,b]|\,\exists\, i\ge n\text{使得}|f_i(x)-f(x)|\ge\varepsilon\},$$

则由 f_n 是处处收敛于 f 的从而 $\{A_n\}$ 是单调下降的有界数集序列，且交集为空集，则满足 Lewin 引理的条件，从按仿照上述可知 $\alpha_n\to 0$，即存在 N，任意 $n>N$，有 A_n 的任一初等集的测度小于 ε.

从而对 $[a,b]$ 上任一满足 $0<s\le|f_n-f|$ 的阶梯函数 $s(x)$，我们注意到集合

$$E=\{x\in[a,b]|s(x)\ge\varepsilon\},\quad F=[a,b]-E,$$

显然 E 与 F 均为初等集，且有 $E\subset A_n$，从而 $m(E)<\varepsilon$，对任意 $x\in[a,b]$ 有 $s(x)<\varepsilon$，从而我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)\mathrm{d}x&=\int_E s(x)\mathrm{d}x+\int_F s(x)\mathrm{d}x\\&\le 2Mm(E)+\varepsilon\cdot(b-a)=(2M+b-a)\varepsilon\end{aligned}$$

其中 M 为其一致有界得到的，从而由命题 9.2 的性质 2 即可知 f_n 与 f 的差可被 ε 估计，从而即证.

笔记 在一致收敛性的条件下，f 可积是可以遗传过来的，但是在 R 积分的语境下得约定 f 可积才能使用控制收敛定理，但在 L 积分下就可以解决这个问题.

9.2 难题选解

命题 9.3 (2009 第一届 CMC,T4)

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上恒满足 $|f_n'(x)| \le M$.

(1) 证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

(2) 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，判断 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否一定可导.

证明 (1) 我们用 Cauchy 收敛法来证明一致收敛性，对任意 $\varepsilon > 0$，设 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3M}$，将 $[a,b]$ 划分为 N 个点 $x_k(1 \le k \le N)$，且满足间距不超过 δ，则有考虑 N 个数列 $\{f_n(x_k)\}(1 \le k \le N)$，由 Cauchy 收敛定理可知，存在 N'，使得任意 $n,m > N$，任意 $1 \le k \le N$，有 $|f_n(x_k) - f_m(x_k)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

从而对任意 $x \in [a,b]$，我们有 x_k 使得 $|x_k - x| < \delta$，从而我们有估计

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\le |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_m(x_k)| + |f_m(x_k) - f_m(x)| \\
&= |f_n'(\xi)(x - x_k)| + \frac{\varepsilon}{3} + |f_m'(\eta)(x - x_k)| \\
&\le M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

第 10 章 重积分

10.1 Jordan 测度

在引入重积分的想法后，我们自然的回去考虑一个问题：什么是面积，什么是体积？或许前者我们可以借助一元函数的 Riemann 积分进行定义，那么体积是否也能类似定义？但这就需要引入测度的定义：

定义 10.1 (Jordan 可测与 Jordan 测度)

对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一个有界集合 E，我们把 E 置于某个标准长方体 H 内，并用 n 组与坐标轴垂直的超平面 (每组有有限多个平行平面) 将 H 分割成若干小标准长方体，称其为对 H 的一个分割 $T=\{H_1,\cdots,H_k\}$. 我们定义：

$$V_{\text{int}}(T,E)=\sum_{H_i\subseteq E^\circ}V(H_i)\ ,\ V_{\text{out}}(T,E)=\sum_{H_j\subseteq E^\circ\bigcup\partial E}V(H_j)=\sum_{H_i\subseteq\overline{E}}V(H_j).$$

进而我们记 $V_*(E)=\sup\limits_T V_{\text{int}}(T,E)$, $V^*(E)=\inf\limits_T V_{\text{out}}(T,E)$，则显然 $V_*(E)\le V^*(E)$，因此当 $V_*(E)=V^*(E)$ 时，称这个集合 E 是有确定的 n 维体积，或是 Jordan 可测的，记为 $V_J(E)$ 或 $|E|$. ♣

在有了上述 Jordan 测度的概念后，我们就给出了一般体积的定义，特殊的，我们考虑测度为 0 的特殊集合：

定义 10.2 (Jordan 零测集)

若 $V_J(E)=0$，即对任意 $\varepsilon>0$，存在标准长方体 $H_1,H_2,\cdots,H_k$，使得

$$E\subseteq\bigcup_{i=1}^k H_i\ ,\ \sum_{i=1}^k V(H_i)<\varepsilon.$$

♣

下面是几个例子：

例题 10.1 E 是 $\mathbb{R}^\kappa$ 中的有界集，则 $V_*(E)=0$ 的充要条件是 $E^\circ=\varnothing$.

证明 一方面，若 $E^\circ\ne\varnothing$，则存在 $B(X,r)\in E^\circ$，使得 $V_*(E)>V(B)-r^n>0$，矛盾! 另一方面，若 $E^\circ=\varnothing$，则任意分割，均不存在标准小长方体在 E° 内部，从而 $V_{int}(T,E)\equiv 0$，进而内测度为 0.

注 在用简单集 (标准小长方体的并) 定义的 Jordan 测度中，我们称 $V_*(E)$ 与 $V^*(E)$ 分别称为 E 的内、外测度.

例题 10.2 $V_*(E)=V^*(E)$ 即 E 的充要条件为 $V^*(E)+V^*(H\setminus E)=V(H)$，其中 $H\supseteq E$ 为标准长方体.

证明 注意到，对给定的任一分割 T，结合 $E^\circ\bigcup\partial E\bigcup(H\setminus E)^\circ$ 为 H 的不交并，我们有以下两个式子恒成立：

$$V_{\text{int}}(T,E)+V_{\text{out}}(T,H\setminus E)=V(H)\ ,\ V_{\text{out}}(T,E)+V_{\text{int}}(T,H\setminus E)=V(H).$$

从而对左右两式恰当地取确界，即有：

$$\sup V_{\text{int}}(T,E)=V(H)-\inf V_{\text{out}}(T,H\setminus E)\ ,\ \inf V_{\text{out}}(T,E)=V(H)-\sup V_{\text{int}}(T,H\setminus E).$$

事实上也即

$$V^*(E)+V_*(H\setminus E)=V(H)\ ,\ V_*(E)+V^*(H\setminus E)=V(H).$$

因此由这个等式我们不难发现命题正确.

笔记 利用实变函数的知识，我们可以构造出这样的例子：

(1) 没有确定 n 维体积的有界闭区域，即存在有界闭区域 J 不可测；

(2) 存在一个有界闭区域，其边界是连续曲线，但其没有确定的面积.

这两个反例的存在告诉我们，Jordan 测度具有一定的局限性，仍然有很多空间结构无法用 J 测度去衡量.

10.1.1 Jordan 测度的性质

下面我们来看一些 Jordan 测度的性质:

命题 10.1

若 $V_*(E)=V^*(E)=V_J(E)$，则

$$\lim_{d(T)\to 0} V_{\text{int}}(T,E)=\lim_{d(T)\to 0} V_{\text{out}}(T,E)=V_J(E),$$

其中 $d(T)=\max\limits_{H_i\bigcap\overline{E}\neq\varnothing} d(H_i)$.

注 这个的证明是直观但是极其繁琐的，和达布上下积分大体思想一致.

命题 10.2

集合 E 是 J 可测的充分必要条件是 $V_J(\partial E)=0$.

证明 一方面，若集合 E 是 J 可测的，从而可知 $V_*(E)=V^*(E)$，进而对任意 $\varepsilon>0$，存在分割 T，使得

$$V_*(E)-V_{\text{int}}(T,E)<\frac{\varepsilon}{2},\quad V_{\text{out}}(T,E)-V^*(E)<\frac{\varepsilon}{2},$$

也即考虑第二类小长方体 (覆盖 ∂E 的) 的体积之和，即

$$\sum_{\partial E\subseteq\bigcup H_i}|H_i|=V_{\text{out}}(T,E)-V_{\text{int}}(T,E)<\varepsilon,$$

即是 Jordan 零测的.

另一方面，我们可以做类似考虑，若边界为 Jordan 零测集，则对任意 ε，对其有若干个小长方体覆盖，进而在其基础上对 E° 进行分割，拼凑得到 E 的分割，进而可估计其内外测度，即可证明.

下面这个定理揭示了 Jordan 零测集族的性质:

定理 10.1

设 $\mathcal{R}$ 为 X 的一子集族，$\varnothing\in\mathcal{R}$ 且满足对任意集合 $A,B\in\mathcal{R}$，均有 $A\bigcup B$，$A\bigcap B$，$A\setminus B$ 属于 $\mathcal{R}$，我们则称 $\mathcal{R}$ 构成一个环，则有 $\mathbb{R}^n$ 上所有的 Jordan 可测集构成环.

证明 设 A,B 均 Jordan 可测，则有 $\partial A,\partial B$ 均为 Jordan 零测集，从而对 $\varepsilon>0$，存在有限个小长方体 $H_1,\cdots,H_k$ 与 $M_1,\cdots,M_l$ 使得

$$\partial A\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}H_i,\quad \partial B\subseteq\bigcup_{i=1}^{l}M_i,\quad \sum_{i=1}^{k}|H_i|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \sum_{i=1}^{l}|M_i|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$, $A^\circ\bigcup B^\circ\subseteq\left(A\bigcup B\right)^\circ$，可知

$$\partial\left(A\bigcup B\right)\subseteq\partial A\bigcup\partial B\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{k}H_i\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{l}M_i\right),$$

故 $\partial\left(A\bigcup B\right)$ 可以被总测度小于 ε 的小长方体覆盖，故为 Jordan 零测集，即 $A\bigcup B$ 可测.

又任意 $\boldsymbol{x}\in\partial(A\setminus B)$，对任意邻域有

$$B(\boldsymbol{x})\bigcap\left(A\bigcap B^c\right)\neq\varnothing,\quad B(\boldsymbol{x})\bigcap\left(A\bigcap B^c\right)^c=B(\boldsymbol{x})\bigcap\left(A^c\bigcup B\right)\neq\varnothing,$$

从而一定有以下两者之一成立

$$B(\boldsymbol{x})\bigcap A(\text{或}A^c)\neq\varnothing,\quad B(\boldsymbol{x})\bigcap B(\text{或}B^c)\neq\varnothing,$$

即 $\boldsymbol{x}\in\partial A\bigcup\partial B$，从而根据前文论述可知，$\partial(A\setminus B)$ 为零测集，进而 $A\setminus B$ 为 Jordan 可测的.

进一步注意到:

$$A\bigcap B=\left(A\bigcup B\right)\setminus\left((A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)\right).$$

从而可知 $A\bigcap B$ 也为 Jordan 可测集，综上我们证明了集族关于并、交与差均封闭，即构成环.

笔记 利用 Jordan 可测集合构成环，我们可以得到以下有限 次可加性与类似于容斥原理的命题.

命题 10.3

设 $V_1,\cdots,V_k$ 均为 J 可测集，则成立以下有限 次可加性

$$V_J\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}V_J(E_i).$$

且等号成立，当且仅当 $E_i^\circ\bigcap E_j^\circ=\varnothing(1\le i<j\le k)$ 也即 $V_J\left(E_i\bigcap E_j\right)=0(1\le i<j\le k)$.

证明 利用归纳原理，我们只需证明二元的情形即可，考虑对 E_1 的分割 T_1 与 E_2 的分割 T_2，则设 $T=T_1\bigcup T_2$，则由 $E_1\bigcup E_2$ 可测，可知

$$\begin{aligned}V_J\left(E_1\bigcup E_2\right)&=V^*\left(E_1\bigcup E_2\right)\le V_{\text{out}}\left(T,E_1\bigcup E_2\right)\\&\le V_{\text{out}}\left(T,E_1\right)+V_{\text{out}}\left(T,E_2\right)\le V_{\text{out}}\left(T_1,E_1\right)+V_{\text{out}}\left(T_2,E_2\right)\end{aligned}$$

从而关于分割 T_1 与 T_2 取下确界，则立即有：

$$V_J\left(E_1\bigcup E_2\right)\le V^*(E_1)+V^*(E_2)=V_J(E_1)+V_J(E_2).$$

而当 $E_1^\circ\bigcap E_2^\circ=\varnothing$ 时，

$$\begin{aligned}V_J\left(E_1\right)+V_J(E_2)&=V_*\left(E_1\right)+V_*(E_2)\le V_{\text{int}}\left(T_1,E_1\right)+V_{\text{int}}\left(T_2,E_2\right)\\&\le V_{\text{int}}\left(T,E_1\right)+V_{\text{int}}\left(T,E_2\right)=V_{\text{int}}\left(T,E_1\bigcup E_2\right)\le V_*\left(E_1\bigcup E_2\right)\end{aligned}$$

其中标红区域用到了两个集合内部不交，从而我们得到了反向不等关系，夹逼即可得到等号成立.

从而对一般的情形我们可以归纳得到.

笔记 事实上，上述证明中蕴含着两个更本质的结论，即对任意点集 S_1,S_2，总有：

$$V^*\left(E_1\bigcup E_2\right)\le V^*(E_1)+V^*(E_2).$$

以及当 $S_1^\circ\bigcap S_2^\circ=\varnothing$ 时，有：

$$V_*\left(E_1\bigcup E_2\right)\ge V_*(E_1)+V_*(E_2).$$

对于上面这个性质，下面这个命题是某种意义上的加强：

命题 10.4

设 $V_1,\cdots,V_k$ 均为 J 可测集，则成立

$$V_J\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)=\sum_{l=1}^{k}(-1)^l\sum_{1\le i_1<\cdots<i_l\le k}V_J\left(\bigcup_{r=1}^{l}E_{i_r}\right).$$

证明 其证明较为复杂，但与容斥原理大同小异，这里仅证明二元情形，即：

$$V_J\left(E_1\bigcup E_2\right)=V_J(E_1)+V_J(E_2)-V_J\left(E_1\bigcap E_2\right).$$

注意到

$$E_1\bigcup E_2=(E_1\setminus E_2)\bigcup\left(E_1\bigcap E_2\right)\bigcup(E_2\setminus E_1).$$

且显然三者内部两两相交为空，因此由命题 8.3，我们可以写出：

$$V_J\left(E_1\bigcup E_2\right)=V_J(E_1\setminus E_2)+V_J\left(E_1\bigcap E_2\right)+V_J(E_2\setminus E_1),$$

又由 $E_1=(E_1\setminus E_2)\bigcup\left(E_1\bigcap E_2\right)$，且两者内部也显然不交，则有 $V_J(E_1\setminus E_2)=V_J(E_1)-V_J\left(E_1\bigcap E_2\right)$，同理另一项也有类似的式子，进而代入即可得到证明.

对于一般的情形，可以用归纳法对集合做类似的分划操作进行证明.

命题 10.5

若集合 E 是 J 可测的，则 E° 与 $\overline{E}$ 也是 J 可测的，且有

$$V_J(E^\circ) = V_J(E) = V_J(\overline{E}).$$

证明 注意到 $E^\circ = E \setminus \partial E$，$\overline{E} = E \bigcup \partial E$，则由 E 可测可知 ∂E 可测且测度为 0，进而有 E° 与 $\overline{E}$ 均可测，且

$$V_J(E^\circ) = V_J(E) - V_J(\partial E) = V_J(E), \quad V_J(\overline{E}) = V_J(E) + V_J(\partial E) = V_J(E).$$

笔记 值得注意的是，单纯得到的逆命题：若 E° 与 $\overline{E}$ 可测则 E 可测并不一定正确，比如考虑反例 $E = [0,1] \bigcap \mathbb{Q}$，则易见有 $V_J(E^\circ) = 0$，$V_J(\overline{E}) = 1$，则可知其不可测，但这也启发我们，是否增加上 $V_J(E^\circ) = V_J(\overline{E})$ 就能有 E 可测呢？这结论是正确的，利用内外测度夹逼即可证明.

在测度论中，Lebesgue 测度是比 Jordan 测度更为广泛的测度，但在一些特别的情形下，两者意义相同：

命题 10.6

有界闭集是 Lebesgue 零测集的充要条件是其为 Jordan 零测集.

证明 对任意集合，如果其 Jordan 零测，其显然 Lebesgue 零测，这是一般且平凡的结论.

而对有界闭集 E，也即紧集，其若是 Lebesgue 零测的，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在可列开小长方体 $H_1, \cdots, H_k, \cdots$ 覆盖 E，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |H_i| < \varepsilon.$$

进而由紧性可知，存在有限子覆盖，不妨设 $H_1, \cdots, H_k$ 能覆盖 E，显见其测度和也小于 ε，即为 J 零测集.

10.1.2 多元函数可积理论

类比一元 Riemann 积分中的可积性理论，我们可以类比得到许多多元函数的可积性理论，这里仅整理出那些证明中蕴含新的思想的定理和命题.

命题 10.7

设 $f(X)$ 在 J 可测的有界闭区域 D 上可积，则其在 D 上有界.

证明 我们先证明点集拓扑中的一个引理：

引理 10.1

若 D 是某个开集的闭包，则一定有 $\partial D^\circ = \partial D$.

设 D_1 为开集，且 $D = \overline{D_1}$，则由于 D° 是包含于 D 内的最大开集，因此开集 $D_1 \subseteq D^\circ$，进而 $D = \overline{D_1} \subseteq \overline{D^\circ}$.

而另一方面，$D^\circ \subseteq D$，且 D 为闭集，又 $\overline{D^\circ}$ 是包含 D° 的最小闭集，从而 $\overline{D^\circ} \subseteq D$.

综上两方面，我们有 $\overline{D^\circ} = D$，进而考虑以下两个不交并的分划：

$$D = D^\circ \bigcup \partial D, \quad \overline{D^\circ} = D^\circ \bigcup \partial D^\circ,$$

可知即有 $\partial D^\circ = \partial D$. □

回到原题，由 $f(X)$ 可积，故存在 I，使得对任意 $\varepsilon > 0$，存在 δ，对任意分割 $T = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_N\}$，若 $d(T) < \delta$，即有任意 $\xi_i \in \Omega_i$，有

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) V_J(\Omega_i) - I \right| < \varepsilon,$$

从而反证法若 $f(X)$ 无界，则存在 $\{X_m\} \to X_0 \in D$，使得 $\{f(X_m)\}$ 无界，而考虑 $\Omega_1 = B\left(X_0, \dfrac{\delta}{2}\right) \bigcap D$，则我们断言 $\Omega_1 \bigcap D^\circ \neq \varnothing$，一方面若已有 $X_0 \in D^\circ$，则平凡成立，另一方面若 $X_0 \in \partial D$，则由 D 为闭区域进而为一道

路连通开集的闭包，从而由引理 $X_0 \in \partial D = \partial D^\circ$，因此 $B\left(X_0, \frac{\delta}{2}\right) \bigcap D^\circ \neq \varnothing$，进而 Ω_1 中也一定包含内点.

进而由 $\Omega_1^\circ \neq \varnothing$ 可知 $V_J(\Omega_1) \neq 0$，从而对 $D \setminus \Omega_1$ 进行分割，得到 T 且 $d(T) < \delta$，但注意到任意 $X_m \in \Omega_1$，有

$$|f(X_m)| \leq \frac{\left|\sum_{i=2}^{N} f(\xi_i) V_J(\Omega_i)\right| + |I| + \varepsilon}{V_J(\Omega_1)} = M,$$

这里固定 $\xi_2, \cdots, \xi_N$，与其无界性矛盾！故可知可积函数在有界闭区域上有界.

笔记 注意，这里对定义域中 D 为有界闭区域的限制是必要的，如果减弱 D 为 J 可测的有界闭集则不一定成立，比如考虑一个圆面长出一条面积为 0 的线段，则在这条线段上可以定义出无界的可积函数.

注 这里蕴含的一个小结论十分重要：$\Omega_1 = B\left(X_0, \frac{\delta}{2}\right) \bigcap D$ 一定包含 D 的内点进而 Jordan 测度不为 0.

完全类比一元 Riemann 积分，我们可以得到以下利用 Darboux 上下积分判别可积性的充要条件：

定理 10.2

设 $f(X)$ 是定义在有界闭区域上的有界函数，则下面三个命题等价：

- $f(X)$ 在 D 上可积；
- $\lim_{d(T) \to 0} (S(T) - s(T)) = 0$；
- 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 D 的分割 T 使得
$$0 \leq S(T) - s(T) < \varepsilon;$$

笔记 其证明与一元函数基本上没有任何思想上的本质区别，只需在符号上恰当修改即可.

下面我们通过引入振幅函数，来最终给出多元函数 Riemann 可积的充要条件：

定义 10.3 (振幅函数)

对任意 $X \in D$，其中 D 为有界闭区域，令

$$G(x) = \max\left\{ \overline{\lim_{D \ni Y \to X}} f(Y),\ f(X) \right\}$$

$$g(x) = \min\left\{ \underline{\lim_{D \ni Y \to X}} f(Y),\ f(X) \right\}$$

我们分别称 $G(X)$ 与 $g(X)$ 为 X 在 D 的上极限函数与下极限函数，据此定义 $f(X)$ 在 D 上的振幅函数为

$$\omega(X) = G(X) - g(X).$$

我们容易发现，振幅函数具有如下的性质

命题 10.8

- $\omega(X) \geq 0$，且 $\omega(X) = 0$ 当且仅当 f 在 X 处连续；
- $G(X)$ 在 D 上上半连续，$g(X)$ 在 D 上下半连续，进而 $\omega(X)$ 在 D 上上半连续；
- 对任意实数 c，有集合
$$E = \{X \in D | \omega(X) \geq c\}$$
为闭集；
-

10.2 转化为重积分的奇思妙想

有许多定积分 (这里泛指一元积分) 问题，直接计算难度很大，但如果恰当分离结构，拼凑出重积分的结构，则会产生许多出人意料的效果.

命题 10.9

证明下面概率积分:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证明 注意到:

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x,$$

而对任意 $a \in \mathbb{R}$，有 $D_1 \subseteq D \subseteq D_2$，其中

$$D_1 = \left\{x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2\right\},\quad D_2 = [0, a]^2,\quad D_3 = \left\{x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2a^2\right\}.$$

则我们事实上有

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a} r\cdot \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right),$$

$$\iint_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a} r\cdot \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right).$$

从而令 $a \to \infty$，则由夹逼定理可知即证.

笔记 本题最精妙的地方在于，首先利用定积分不好计算，但联想到对于二重积分，$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 这种结构如果用极坐标换元，就会产生非常好的效果，就可以算出结果，因此本题就转化成重积分后，利用两个半圆区域夹逼即可的到结果，非常神奇!

命题 10.10

计算:

$$J(a) = \int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x.$$

解 注意到我们可以将含参变量该定积分转化为二重积分:

$$J(a) = \int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{a}\frac{1}{1+y\cos x}\mathrm{d}x,$$

而对于后者我们可以采用 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ 进行换元.

笔记 事实上，这个思想与含参变量积分如出一辙，并没有本质区别.

下面这个例子来自《数学天书中的证明》，美妙的令人窒息!

命题 10.11 (Unbelievable!!!)

利用重积分 $\displaystyle\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，证明 Euler-Passel 等式:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

证明 一方面，我们对 $\dfrac{1}{1-xy}$ 作展开

$$\frac{1}{1-xy}=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n,$$

从而由累次极限与重极限的关系，这里容易看见可以交换次序，即有

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{[0,1]^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\iint_{[0,1]^2}(xy)^n\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\zeta(2)\end{aligned}$$

另一方面，我们作换元，令 $x=u-v, y=u+v$(为什么这么做？消去交叉项的思想！)，从而显见，Jacobbi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2$，则我们利用对称性可以化为累次积分如下：

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\iint_{D'}\frac{1}{1-u^2+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=4\int_0^{1/2}\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}\mathrm{d}v+4\int_{1/2}^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}\mathrm{d}v(\text{利用对称性})\\&=4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

又注意到 (非常神奇的!!!)

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right),\quad -\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

从而借助这个小观察，立即可以算出积分值为 $\dfrac{\pi^2}{6}$，即证原来等式.

笔记 注意这里在计算二重积分的时候，如果转化成：

$$\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x,$$

是毫无价值的，因为这等价于第一种算法，因此这也启发我们，如果将问题转化为二重积分来算，那么核心的突破口将出现在如何对二重积分进行合适的换元上！

命题 10.12

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足

$$f(x)=1+\lambda\int_x^1 f(t)f(t-x)\mathrm{d}t,$$

且满足 λ 为常数，证明：$\lambda\leq\dfrac{1}{2}$.

证明 对于给定的函数等式，我们一般习惯去求导研究，但事实上也可以考虑积分得到结果，考虑对等式关于 x 从 0 到 1 积分，并设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则显见 $F(0)=0$，进而我们有上式即：

$$\begin{aligned}F(1)-1&=\lambda\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(t)f(t-x)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\int_0^t f(t-x)\mathrm{d}x\\&=\lambda\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^1 f(t)F(t)\mathrm{d}t=\frac{\lambda}{2}(F(1))^2\end{aligned}$$

从而由 $F(1)\in\mathbb{R}$ 可知判别式非负，即有 $\lambda\leq\dfrac{1}{2}$.

笔记 本题启示我们，如果遇到较为复杂的二元含参/变限定积分，则可以考虑构造二重积分，转化成累次积分并借助交换次序/变量代换等问题加以解决.

命题 10.13

证明组合恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!}=\frac{2}{(2n+1)\cdot(n-1)!}.$$

证明 证法 1，本题的来源，利用重积分构造

我们注意到 (事实上不可能注意到)，考虑 n 重积分

$$\int_D\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1+x_2+\cdots+x_n\le 1,x_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n\}$，下面用两种方法计算该重积分.

一方面，对于这种 n 维单形，可以考虑做如下比例换元，设

$$x_1=a_1(1-a_2),\cdots,x_k=a_1\cdots a_k(1-a_{k+1}),\cdots,x_n=a_1a_2\cdots a_n,$$

从而积分区域变为 $D'=[0,1]^n$(这正是此类换元的核心巧妙之处)，因此下面计算过渡的 Jacobbi 矩阵行列式 $\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(a_1,a_2,\cdots,a_n)}$，下面归纳证明 $\det\left(\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(a_1,a_2,\cdots,a_n)}\right)=a_1^{n-1}a_2^{n-2}\cdots a_{n-1}$.

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(a_1,a_2,\cdots,a_n)}\right)&=\begin{vmatrix}1-a_2&-a_1&\cdots&0\\a_2(1-a_3)&a_1(1-a_3)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_2\cdots a_{n-1}(1-a_n)&a_1a_3\cdots a_{n-1}(1-a_n)&\cdots&-a_1\cdots a_{n-1}\\a_2\cdots a_{n-1}a_n&a_1a_3\cdots a_{n-1}a_n&\cdots&a_1\cdots a_{n-1}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}{\partial(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})}&O_{(n-1)\times1}\\ *&a_1\cdots a_{n-1}\end{vmatrix}(\text{将第}n\text{行加到第}n-1\text{行上.})\\&=(a_1\cdots a_{n-1})(a_1^{n-2}\cdots a_{n-2})=a_1^{n-1}a_2^{n-2}\cdots a_{n-1}\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_D\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n&=\int_{[0,1]^n}\sqrt{a_1}\cdot a_1^{n-1}a_2^{n-2}\cdots a_{n-1}\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\cdots\mathrm{d}a_n\\&=\int_0^1a_1^{n-1/2}\mathrm{d}a_1\int_0^1a_2^{n-2}\mathrm{d}a_2\cdots\int_0^1a_{n-1}\mathrm{d}a_{n-1}\int_0^1\mathrm{d}a_n\\&=\frac{1}{n+1/2}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}=\frac{2}{(2n+1)\cdot(n-1)!}\end{aligned}$$

而另一方面，我们不做换元直接进行累次积分，可计算出:

$$\begin{aligned}&\int_D\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\=&\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{1-x_1-\cdots x_{n-1}}\sqrt{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_n\\=&\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!}\end{aligned}$$

上述最后的计算是容易的，只需建立递推关系归纳即可，其中都是幂函数积分.

因此综合两方面我们有原恒等式成立!

笔记 在计算 Jacobbi 行列式的时候，我开始采取的计算方法是类比球坐标换元行列式计算方法，去构造方程组利用隐函数定理，但写开后发现直接归纳更容易. 本证法的主要目的在于体现，对于这种结构的换元的巧妙之处，恒等式的发现完全是意外收获，但是进一步探索，也可以发现另一个饶有趣味的证明.

证明 证法 2，核心观察是恒等式中的双阶乘结构，进而联想到 Wallis 公式

我们注意到：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k\cdot k!}{(2k+1)!!\cdot k!(n-k)!}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cdot\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}x\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cdot\sin^{2k+1}x\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{n!}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\cdot\sin^{2k}x\right)\sin x-\sin x\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{n!}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\sin x-\sin x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{2}{(2n+1)\cdot(n-1)!}
\end{aligned}
$$

笔记 这个问题源自计算证法 1 中的 n 重积分，军军老师给出的是证法 1 中的另一方面的计算方法，且在南开教材中给出的也是有限项相加的表达式作答案，但笔者借助后面 1984 年 Putnam 竞赛中的换元想法直接地给出了第一种计算方案，由此产生了该恒等式.

而在进一步的探索中，很容易联想双阶乘发现可以嵌入 Wallis 公式的结构，进而可以转化成一个定积分问题，思想之巧妙，真是佩服笔者自己 (bushi).

命题 10.14

设 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 均为平面上 Jordan 可测的有界闭区域，设

$$a_{ij}=V_J\left(D_i\bigcap D_j\right),$$

证明：矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定阵.

证明 核心想法是利用重积分来表示区域的 Jordan 测度.

由 n 个区域有界，可知存在 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形 H 使得 $D_i\subseteq H(1\le i\le n)$，从而我们引入 H 上的特征函数 $\mathbb{1}_E(X)$，其中 E 为任一 H 的子集，有

$$\mathbb{1}_E(X)=\begin{cases}1 & X\in E\\ 0 & X\notin H\setminus E\end{cases}.$$

因此可知 $\mathbb{1}_E(X)$ 的不连续点全体恰为 ∂E，故有当且仅当 E 为 Jordan 可测时，特征函数 $\mathbb{1}_E(X)$ 在 H 上 Riemann 可积，因此我们结合 $D_i\bigcap D_j$ 可测知其特征函数可积，进而可写做

$$a_{ij}=V_J\left(D_i\bigcap D_j\right)=\iint_H\mathbb{1}_{D_i\cap D_j}(X)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而由特征函数的性质我们可知 $\mathbb{1}_{D_i\cap D_j}(X)=\mathbb{1}_{D_i}(X)\cdot\mathbb{1}_{D_j}(X)$，因此我们有对任意 $x_1,\cdots,x_n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j &= \sum_{i,j=1}^{n}\iint_H x_i\mathbb{1}_{D_i}(X)\cdot x_j\mathbb{1}_{D_j}(X)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint_H\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_i\mathbb{1}_{D_i}(X)\cdot x_j\mathbb{1}_{D_j}(X)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_H\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{1}_{D_i}(X)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0
\end{aligned}
$$

笔记 这个例子再一次揭示了重积分的用处，可以将离散量连续化，便于整体处理.

命题 10.15

一个矩形被分割成若干个更小的矩形，每个小矩形的长和宽中至少有一个是正整数. 证明：该矩形的长和宽中也至少有一个是正整数.

证明 我们先证明，若矩形可以被分割，则分割得到的小矩形一定各边与原矩形边平行.

我们先考虑证明下图左中的 ∠ 形区域无法被有边长为正整数的矩形覆盖，事实上以顶点为圆心做一半径为 $\frac{1}{2}$ 的弧线，则可知其内部不存在整数边矩形，因此整数边矩形一定完全盖住该扇形区域，易见这不可能.

从而我们假设若有边不平行与矩形的小矩形 P，则与 ∂P 相交不空的矩形一定与其一边部分重合，如 R，否则若如 Q，则 P，Q 间会产生 ∠ 形区域不被覆盖矛盾，因此存在一系列与该矩形平行的矩形，直至与原矩形一边相交，不妨设为 R，则必仍有 ∠ 形区域，矛盾！综上不存在斜矩形，即证.

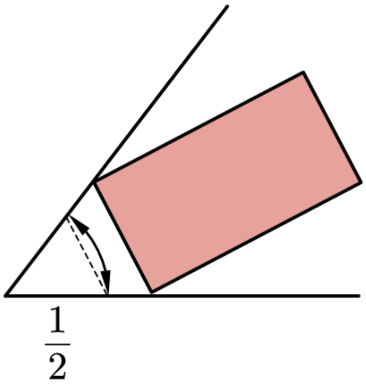


图 10.1: ∠ 形区域不被覆盖

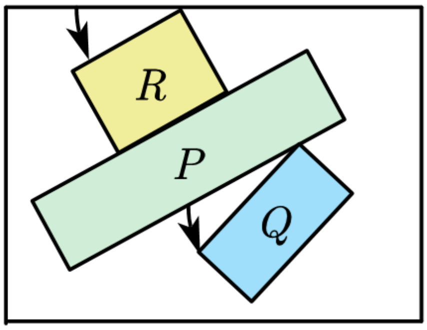


图 10.2: 若存在斜矩形的矛盾

从而我们将原矩形置于 xOy 中，设矩形为 $[0,a]\times[0,b]$，其被分割为 $T_i=[a_i,b_i]\times[c_i,d_i](1\le i\le m)$，则可知 b_i-a_i，d_i-c_i 至少有一个为整数，从而我们构造 $f(x,y)=\sin 2\pi x\cdot\sin 2\pi y$，则可知

$$\iint_{T_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{a_i}^{b_i}\sin 2\pi x\mathrm{d}x\cdot\int_{c_i}^{d_i}\sin 2\pi y\mathrm{d}y=\frac{(\cos 2\pi b_i-\cos 2\pi a_i)(\cos 2\pi d_i-\cos 2\pi c_i)}{4\pi^2},$$

则可知 $\iint_{T_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，对任意 $1\le i\le m$，从而由 $\{T_i\}$ 为 $R=[0,a]\times[0,b]$ 的一个分割，因此由积分区域的可加性，我们有：

$$0=\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\sin 2\pi x\mathrm{d}x\cdot\int_0^b\sin 2\pi y\mathrm{d}y=\frac{(1-\cos 2\pi a)(1-\cos 2\pi b)}{4\pi^2},$$

从而 a,b 至少有一个为整数，即矩形长与宽至少有一个为整数，即证！

笔记 本题的巧妙之处在于积分函数的构造，首先为了利用“至少一个”这种或类型条件，我们希望产生一个刻画结构表示长为整数的“特征”与宽为整数的“特征”相乘，只要整体的这个特征为 0，那么一定有一个特征为 0，因此我们就联想到了构造一个可积函数来作为特征，进而就刻画清楚了条件，最后反馈为整个矩形的特征，精妙！

在总览以上几个题我们发现，利用重积分的最大一个特点就是将区域的性质转化为重积分的计算，本质上相当于构造了对应的特征函数，来表示这一区域，如上题就直接利用重积分表示区域测度，本题就可以用 $\sin 2\pi x\cdot\sin 2\pi y$ 这个特征函数表征矩形长宽整数特性！这是一个非常有价值的想法，化抽象为具体！

本题是 N. G. de Bruijn 在 1969 年发现的定理，还有其他多种证法，参看知乎回答中的 AMM 论文链接.

推论 10.1

容易发现本题的结论可以推广到 n 维的空间中超立方体的分割，但此时对大于 3 维的情形，无法借助组合几何的知识证明不存在斜立方体，因此必须假定分割即为标准分割.

命题 10.16 (利用重积分给出定积分不等式的反向估计)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不恒为 0，满足 $0 \le f(x) \le M$，若

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 + \Delta,$$

证明：

$$0 \le \Delta \le M^2((b-a)^2 + 2 - 2\cos(b-a)) \le \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

证明 我们考虑将定积分转化为二重积分，因为这样就可以处理原本无法运算的平方式：

$$A = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$B = \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$C = \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}\Delta &= A - B - C \\ &= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left(1 - \sin x\sin y - \cos x\cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left(1 - \cos(x-y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\le M^2\iint_{[a,b]^2} \left(1-\cos(x-y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (*)\end{aligned}$$

因此利用二重积分的表达式，容易得到 $\Delta \ge 0$，进一步计算 (*) 的积分结果，即有

$$\Delta \le M^2((b-a)^2 + 2 - 2\cos(b-a)),$$

且若将 $1-\cos(x-y)$ 放大为 $\dfrac{(x-y)^2}{2}$，则可得到后面的估计结果.

笔记 本题给我们了启示就是，定积分的结构中出现平方时，可以考虑转化成二重积分，这样便于直接加减运算和配方，值得学习！

命题 10.17 (1993,Putnam 数学竞赛 B4)

设 $0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$ 上函数 $K(x,y)$ 恒正且连续，且连续函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上也恒正，若对任意 $x \in [0,1]$，有

$$\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y = g(x), \quad \int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y = f(x),$$

证明：对任意 $0 \le x \le 1$，有 $f(x) = g(x)$.

证明 对任意 $x \in [0,1]$ 有：

$$f(x) = \int_0^1 g(t)K(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(y)K(t,y)K(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(y)L(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$L(x,y) = \int_0^1 K(x,t)K(t,y)\mathrm{d}t, \quad \forall x,y \in [0,1].$$

同理对任意 $x \in [0,1]$，有 $g(x) = \int_0^1 g(y)L(x,y)\mathrm{d}y$，则由 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 连续恒正，从而设在 $[0,1]$ 有最大值 $M = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)}$.

从而有：

$$M=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}=\int_0^1\frac{g(y)L(x_0,y)}{f(x_0)}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{g(y)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)L(x_0,y)}{f(x_0)}\mathrm{d}y\le M\int_0^1\frac{f(y)L(x_0,y)}{f(x_0)}\mathrm{d}y=M.$$

从而可知 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 恒为常数 M，则进而有

$$g(x)=Mf(x)=M\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y=M^2\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y=M^2g(y),$$

则由 $g(x)>0$ 可知 $M=1$，从而恒有 $f(x)=g(x)$.

笔记 本题还蕴藏了一个不太明显的小结论，若 $[a,b]$ 上的正值函数 $h(x,y)$，$k(x)$ 满足

$$\int_a^b h(x,y)\mathrm{d}y=1,\quad \int_a^b h(x,y)k(y)\mathrm{d}y=k(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

则 $k(x)$ 一定为常值函数.

命题 10.18 (升积分重数降函数次数)

设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上连续，证明：

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x$$
$$\le\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2+\int_0^1\int_0^1[f(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

证明 为了处理平方式，我们类比前几题的想法，考虑变为四重积分，等价于证明下式，

$$\int_D f(x,y)f(z,y)\mathrm{d}X+\int_D f(x,y)f(x,w)\mathrm{d}X\le\int_D f(x,y)f(z,w)\mathrm{d}X+\int_D[f(x,y)]^2\mathrm{d}X,$$

其中 $D=[0,1]^4$，$X=(x,y,z,w)$，则注意到对称性，则可写作：

$$\int_D\left(\sum_{cyc}(f(x,y))^2+2f(x,y)f(z,w)+2f(x,w)f(z,y)-2\sum_{cyc}f(x,y)f(z,y)\right)\mathrm{d}X\ge 0,$$

从而配方即等价于：

$$\int_D(f(x,y)+f(z,w)-f(x,w)-f(z,y))^2\,\mathrm{d}X\ge 0,$$

这是平凡成立的，综上我们证明了题给不等式成立.

笔记 回顾定积分不等式的证明方法，最本源的是利用离散不等式取极限证明，因此可以考虑证明

$$n\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n x_{ij}\right)^2+n\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n x_{ij}\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij}\right)^2+n^2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{ij}^2.$$

初等的角度来看，可以直接发现有右式与左式的差恰好为

$$\frac14\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n(x_{ij}+x_{kl}-x_{il}-x_{kj})^2\ge 0.$$

而另一方面，我们也可以从矩阵的角度，构造矩阵来证明该离散不等式：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ \vdots&\ldots&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ldots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

则该离散不等式可重写为：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{XE}(\boldsymbol{XE})^{\mathsf T})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{EX}(\boldsymbol{EX})^{\mathsf T})\le\mathrm{tr}(\boldsymbol{XE})\cdot\mathrm{tr}(\boldsymbol{EX})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^{\mathsf T}\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathsf T}\boldsymbol{X}),$$

而这个不等式 (或许是) 平凡的，嘻嘻.

10.3 重积分与偏导数

定积分问题中有很多题目与一元导数结合起来，同样地，在重积分中，也有不少这样的题目，往往这些题目都可以在定积分中找到类比，但如何解决这类阴间题通常也颇费功夫.

命题 10.19

设 $f(x,y)\geq 0$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$ 上有连续的一阶偏导数，且在 ∂D 上取值为 0，证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{1}{3}\pi a^3\cdot\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

笔记 面对这个问题，需要估计一个曲顶柱体的体积，且形式上出现了偏导数，这意味着会和“切线”牵扯上关系，因此回忆其定积分里的题目，有一个问题的形式与本题几乎一致：

命题 10.20

设 f 是 $[a,b]$ 上的连续可微上凸函数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)=\alpha>0$，$f'(b)=\beta<0$，则证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

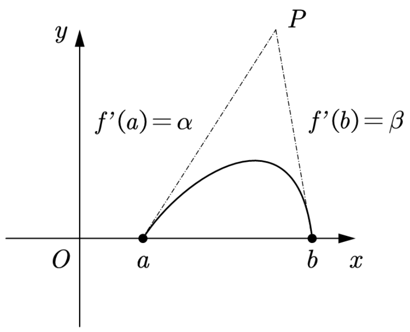


图 10.3: 构造外切三角形

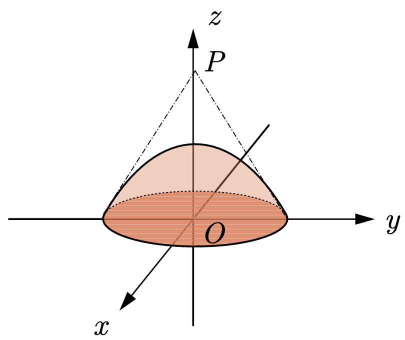


图 10.4: 类比思想构造外切圆锥

从上述命题右侧很复杂的形式，容易抽离出类似于三角形面积的结构，因此画出具体图形，在 a,b 两点处引出切线，相交于 P，那么容易从题给条件中得出，曲线 $(x,f(x))$ 是完全位于 ΔPab 内部的 (利用上凸，两条切线为支撑线)，且进一步的计算发现恰好 $S_{\Delta Pab}=\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}$，因此我们从几何角度就可以解决定积分的版本.

因此我们就会对原题做出类似的猜测，是否可以找到一个足够高的圆锥，进而完全“包裹”住曲顶柱体呢？至此我们寻找到了可操作的方法.

证明 任取一点 $X=(x,y)\in D$，考虑射线 OX 与圆周 ∂D 的交点 X'，从而有 $f(X')=0$，从而我们由多元函数的微分中值定理，

$$f(X)-f(X')=\langle\nabla f(X^*),X-X'\rangle=\frac{\partial f}{\partial x}(X^*)\cdot x_{X-X'}+\frac{\partial f}{\partial y}(X^*)\cdot y_{X-X'},$$

其中 X^* 在线段 XX' 上，从而由 Cauchy 不等式

$$|f(X)|\leq\sqrt{x_{X-X'}^2+y_{X-X'}^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X^*)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(X^*)\right)^2}=\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X^*)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(X^*)\right)^2}.$$

从而即有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\iint_D\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{3}\pi a^3\cdot M.$$

综上我们用类比的思想完成了本题.

命题 10.21 (一道难题)

设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]^2$ 上四次连续可微，在其边界 ∂D 上取值为 0，且
$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|\leq M,\quad (x,y)\in D.$$
证明：
$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{M}{144}.$$

笔记 对于四阶偏导数，利用 Taylor 展开是无从下手的，因此我们需要寻找新的嵌入方法，类比定积分，我们自然想到了"分部积分"这一想法，如果适当给 $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)$ 配凑上一个 $g(x,y)$，或许可以使得对其乘积积分最终可将四阶偏导数化为 $f(x,y)$.

因此我们对偶的取考虑 $g(x,y)$ 的构造，它一定得具有与 $f(x,y)$ 类似的性质，因此得到的 $g(x,y)$ 边界一定为 0，进一步，我们希望 $g(x,y)$ 的四阶偏导最好是常数，这也最不会影响 $f(x,y)$ 重积分，因此结合两方面，我们期待 $g(x,y)$ 是一个关于 x,y 的对称四次多项式，自然地，我们想到构造 $g(x,y)=x(1-x)y(1-y)$.

证明 考虑 $g(x,y)=x(1-x)y(1-y)$，则一方面 $\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)=4$，另一方面，
$$\iint_D x(1-x)y(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{36}.$$
在发现这两个很明显的数字特征后，我们自然地想到去考虑证明：
$$\iint_D\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
而我们注意到：
$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)g(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}g(x,y)\bigg|_{x=0}^1-\int_0^1\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\quad(\text{分部积分})\\&=-\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}g(x,y)\bigg|_{x=0}^1-\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\quad(\text{分部积分})\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x=\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$
因此由对称性 (函数结构对称性与变量对称性)，我们有：
$$\iint_D\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
因此我们有
$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{4}\left|\iint_D\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{4}\left|\iint_D\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{M}{144},$$
综上我们借助分部积分完成了本题，其中 $g(x,y)$ 的构造是颇具技巧性的，值得反复品味.

注 本题除了直接构造，也可以通过对一元情形的分部积分，即发现
$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''_{xx}(x,y)\mathrm{d}x.$$
这样去做或许更加自然.

10.4 难题选解

我们先来看几个 n 重积分的例子，这些题目的核心在于利用**对称性**进行简化计算：

命题 10.22

(1) 计算 n 重积分

$$\int_{[0,1]^n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=J$，则计算 n 重积分

$$\int_{[0,1]^n}\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $p_k(1\le k\le n)$ 均为给定实数.

(3) 计算 n 重积分

$$\int_{[0,1]^n}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$\int_{[0,1]^n}\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

♠

解 (1) 我们作换元 $t_k=1-x_k(1\le k\le n)$，则显见

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
=&\int_{[0,1]^n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\left[(1-t_1)+(1-t_2)+\cdots+(1-t_n)\right]\right)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\\
=&\int_{[0,1]^n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}(t_1+t_2+\cdots+t_n)\right)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\\
=&\int_{[0,1]^n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

进而有积分值为 $\frac{1}{2}$，从而利用对称性很轻松的解决了此题.

(2) 注意到，利用对称性计算的本质在于发掘出关于各个变量等价的轮换对称式，因此我们抽离出如下结构：

$$I_j=\int_{[0,1]^n}\frac{x_j}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

从而由对称性易见 $I_1=I_2=\cdots=I_n$，从而由

$$\sum_{j=1}^n I_j=\int_{[0,1]^n}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^1 f(x_1)\mathrm{d}x_1\cdots\int_0^1 f(x_n)\mathrm{d}x_n=J^n,$$

可知 $I_j=\frac{J^n}{n}$，因此原积分值为 $\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\cdot J^n$.

(3) 利用同样的思想，我们为了考虑将 max 显示出来，且考虑轮换对称性，我们将 $[0,1]^n$ 分成 $n!$ 个不同区域 $D_{i_1i_2\cdots i_n}$，其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列：

$$D_{i_1i_2\cdots i_n}=\{(x_1,\cdots,x_n)|0\le x_{i_1}\le x_{i_2}\le\cdots\le x_{i_n}\}.$$

由对称性，$n!$ 个区域上的积分值均相等，因此有

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=n!\int_{D_{n(n-1)\cdots 21}}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
=&\,n!\int_{D_{n(n-1)\cdots 21}}x_1\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=n!\int_0^1 x_1\,\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\\
=&\,n!\int_0^1 x_1\,\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}=n!\int_0^1 x_1\cdot\frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x_1=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

从而我们利用对称性划分区域，非常顺畅的得到了

$$\int_{[0,1]^n} \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{n}{n+1}.$$

下一步我们再利用对称性得到相应的最小值 (当然也可以仿照上面划分区域，但这里可以直接得到).

注意到：

$$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \min\{1-t_1, 1-t_2, \cdots, 1-t_n\} = 1 - \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

从而有

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^n} \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ = &V_J([0,1]^n) - \int_{[0,1]^n} \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

笔记 这几个问题都涉及到利用对称性去进行处理，因此启发我们在面对变量轮换对称时，抓住对称性，整体对变量做对称结构的替换 (这时可以通过一元情形进行观察)，如问题 (1)；或者将积分区域进行轮换对称的分割，简化积分函数，进而求解，如问题 (3).

命题 10.23 (难想的变量替换)

计算三重积分

$$\iiint_{[0,1]^3} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 首先直接化为累次积分进行计算，不难看出该有理函数积分将会产生巨大的计算量，因此我们就下一步去考虑利用球坐标换元，但又观察到换元后，分母为 $(1+r^2)^2$，分子为 $r^2 \sin\varphi$，这对 r 积分不利，因为无法凑出 r^2 微分，这直接导致了后续计算量过大.

综合两方面，为了第一步走的更轻松，吸取上述经验，我们希望分子为 r，因此我们自然想到了，第一步变量替换，应该为柱坐标变换!!! 从而令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，又考虑到区域对称性，我们设

$$V' = \{(x,y,z) | 0 \le y \le x \le 1, 0 \le 1\}, \quad V'' = \left\{(r,\theta,z) | 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, r \le \sec\theta, 0 \le z \le 1\right\},$$

则有

$$\begin{aligned} &\iiint_{[0,1]^3} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ = &2\iiint_{V''} \frac{r}{(1+r^2+z^2)^2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ = &2\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{\sec\theta} \frac{r}{(1+r^2+z^2)^2} \mathrm{d}r \\ = &\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\right) \mathrm{d}z \\ = &\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(\frac{\sec^2\theta}{(1+z^2)(1+z^2+\sec^2\theta)}\right) \mathrm{d}z \end{aligned}$$

下一步该如何操作？这是另一个非常重要且不平凡的观察，看起来 z 与 $\sec\theta$ 基本上毫无关系，但是，如果我们强行创造呢？如果我们设 $z = \tan\varphi$，从而化简可得：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(\frac{\sec^2\theta}{(1+z^2)(1+z^2+\sec^2\theta)}\right) \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\varphi(\sec^2\varphi+\sec^2\theta)} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} \\ &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\varphi+\sec^2\theta} \mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

从而转化到这里，利用对称性容易看见积分值即为 $\frac{1}{2}$，即所求值.

笔记 本题有三个卡点，第一部分是利用对称性 (这部分想到了为后面想到 z 换元铺垫)，第二部分进行柱坐标换元其实稍微自然，因为几个常见的其他探索都无果，第三个卡点就是关注到 z 的换元，这是最核心巧妙的地方，需要非常强大的观察能力.

命题 10.24 (1984 普特南竞赛题，精彩！)

设 $V=\{(x,y,z)|x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0,x+y+z\leq 1\}$，$w=1-x-y-z$，将三重积分

$$\iiint_V x^1y^9z^8w^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

表示成 $\frac{a!b!c!d!}{n!}$ 的形式，其中 a,b,c,d,n 均为正整数.

解 注意到原四面体区域可表示为

$$V=\{(x,y,z)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1-x,0\leq z\leq 1-x-y\}$$

我们联想到在多元函数难题选解 (II) 中一个题，对三角形区域，我们做了一个“系数”上的变量替换，从而转化成了方形区域！因此我们用类似的想法，可以考虑如下换元

$$x=u(1-v),\quad y=uv(1-t),\quad z=uvt,$$

因此一方面，Jacobbi 行列式为 u^2v，积分区域变为 $V'=[0,1]^3$，且 $w=1-u$，即有

$$\begin{aligned}&\iiint_V x^1y^9z^8w^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&\iiint_{[0,1]^3} u^{20}(1-u)^4v^{18}(1-v)t^8(1-t)^9\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\ =&\int_0^1 u^{20}(1-u)^4\ \mathrm{d}u\int_0^1 v^{18}(1-v)\mathrm{d}v\int_0^1 t^8(1-t)^9\mathrm{d}w\end{aligned}$$

而我们利用 Beta 函数 (或递推关系) 可以得到

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\frac{m!n!}{(m+n+1)!},$$

从而代入可知结果为 $\frac{1!9!8!4!}{25!}$(这个结果非常巧妙！).

笔记 这个换元揭示了另一种考量，为了把交叉融合的变量分开，我们一种想法是把变量代换后，乘变加，另一种想法就是本题中的将非方形领域变为方形领域，从而也可以将累次积分转化成若干定积分的乘积.

推论 10.2

更一般的，本题可推广为 Dirichlect 积分

$$\iiint_V x^py^qz^rw^s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)},$$

其中 p,q,r,s 均为任意实数.

事实上，上述命题还有更一般的结果，证明核心都在于对 n 维单形的变量替换：

推论 10.3

再一般的，有 Liouville 公式

$$\int_{V_n} f(x_1+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u,$$

其中 $p_i(1\leq i\leq n)$ 均为正实数，且有

$$V_n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_1+\cdots+x_n\leq 1,x_1,\cdots,x_n\geq 0\}.$$

命题 10.25 (有趣的小问题)

证明下面方程至多有一个连续解

$$f(x,y)=2022+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v,\quad (x,y)\in[0,1]^2.$$

证明 设有 $h_1(x,y)$，$h_2(x,y)$ 满足上述方程，则一方面，我们有

$$h_1(x,y)-h_2(x,y)=2022+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y (h_1(x,y)-h_2(x,y))\,\mathrm{d}v,$$

设 $H(x,y)=h_1(x,y)-h_2(x,y)$，则设其在 $D=[0,1]^2$ 有最大值 $H(x_0,y_0)=M$，则有

$$M=H(x_0,y_0)=\int_0^{x_0}\mathrm{d}u\int_0^{y_0}H(u,v)\mathrm{d}v\le Mx_0y_0,$$

即 $M(1-x_0y_0)\le 0$，又 $1-x_0y_0\ge 0$，从而 $h_1(x,y)-h_2(x,y)\le M\le 0$，同理 $h_2(x,y)-h_2(x,y)\le 0$，综上两方面，我们有 $h_1(x,y)=h_2(x,y)$，即满足方程的连续函数至多一个.

笔记 非常短小精悍的小问题，却蕴含着比较深邃的思想，关注对象对称性是关键!

命题 10.26

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定方阵，记 $X=(x_1,\cdots,x_n)$，$H(X)=X\boldsymbol{A}X^{\mathrm{T}}$，若 $p|n$，计算

$$\int_{X\boldsymbol{A}X^{\mathrm{T}}\le 1}\exp\left(\sqrt{H^p(X)}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，从而存在正交阵 U，使得 $\boldsymbol{U}^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，其中正实数 $\lambda_i(1\le i\le n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，从而做变量替换 $X^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}$，则可知 $\det\left(\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right)=\det(U)=1$，且 $X\boldsymbol{A}X^{\mathrm{T}}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

进一步作广义球坐标变换

$$\begin{cases}y_1=r\cos\theta_1/\sqrt{\lambda_1},\\ y_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2/\sqrt{\lambda_2},\\ \vdots\\ y_{n-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1}/\sqrt{\lambda_{n-1}},\\ y_n=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}/\sqrt{\lambda_n},\end{cases}$$

其 Jacobbi 行列式为 $\det\boldsymbol{J}=\dfrac{r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}=\dfrac{r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}}{\det\boldsymbol{A}}$，因此我们可得

$$\begin{aligned}&\int_{X\boldsymbol{A}X^{\mathrm{T}}\le 1}\exp\left(\sqrt{H^p(X)}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\cdot\det\boldsymbol{A}\\ =&\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{e}^{r^p}\mathrm{d}r\cdot V_J(B(O,1))=\frac{2^n}{(n-1)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{e}^{r^p}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

而对 $\displaystyle\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{e}^{r^p}\mathrm{d}r$ 结合 $p|n$，可以通过 n/p 次分部积分得出结果.

笔记 本题的核心思想在与把握住换元的想法即可，剩下的便是基础的计算，最后的定积分先换元会更简便.

命题 10.27 (利用正交变换)

设 f 为连续函数，$a_1,\cdots,a_n$ 为给定不全为 0 得实数，计算:

$$\int_D f(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $D=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1\}$.

解 考虑 n 维单位列向量

$$\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}},\cdots,\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，从而考虑做正交变换

$$(x_1,\cdots,x_n)(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(u_1,\cdots,u_n).$$

从而我们易见正交变换的Jacobbi矩阵为 $\det\left(\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right)=1$，且根据正交变换保内积性有 $u_1^2+\cdots+u_n^2\le 1$，因此做变量替换可得，其中 $D'=\{(u_1,\cdots,u_n)|u_1^2+\cdots+u_n^2\le 1\}$：

$$\begin{aligned}&\int_D f(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\=&\int_{D'} f\left(\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot u_1\right)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\=&\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot u\right)\mathrm{d}u\int_{u_2^2+\cdots+u_n^2\le 1-u^2}\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\\=&\frac{2^{n-1}}{(n-1)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\cdot\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}f\left(\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot u\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

因此原题中的 n 重积分可以用上式中的定积分来代替，而往往定积分的计算都是容易的.

笔记 对于多变量的线性组合为整体出现的 n 重积分，且积分区域为球体，则可以考虑做正交的线性变换，将多变量化为单变量，如本题，这是非常重要的想法！

命题 10.28

设 $f_1(x),\cdots,f_m(x);g_1(x),\cdots g_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m!}\int_{[a,b]^m}\begin{vmatrix}f_1(x_1)&\cdots&f_1(x_m)\\\vdots&&\vdots\\f_m(x_1)&\cdots&f_m(x_m)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}g_1(x_1)&\cdots&g_1(x_m)\\\vdots&&\vdots\\g_m(x_1)&\cdots&g_m(x_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m\\=&\begin{vmatrix}\int_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x&\cdots&\int_a^b f_1(x)g_m(x)\mathrm{d}x\\\vdots&&\vdots\\\int_a^b f_m(x)g_1(x)\mathrm{d}x&\cdots&\int_a^b f_m(x)g_m(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

证明 我们考虑对 m 用数学归纳法，注意到 $m=1$ 命题平凡，从而假设已有 $m-1$ 时成立命题，则设 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 表示第一个矩阵的 (i,j) 元的余子式，$\boldsymbol{G}_{ij}$ 表示第二个矩阵的 (i,j) 元的余子式，$\boldsymbol{M}_{ij}$ 表示第三个矩阵的 (i,j) 元的余子式，因此我们将行列式乘积两项均按第一列展开，即有：

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}f_1(x_1)&\cdots&f_1(x_m)\\\vdots&&\vdots\\f_m(x_1)&\cdots&f_m(x_m)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}g_1(x_1)&\cdots&g_1(x_m)\\\vdots&&\vdots\\g_m(x_1)&\cdots&g_m(x_m)\end{vmatrix}\\=&\frac{1}{m!}\left(\sum_{r=1}^m f_r(x_1)\cdot(-1)^{r+1}\boldsymbol{F}_{r1}\right)\left(\sum_{r=1}^m g_r(x_1)\cdot(-1)^{r+1}\boldsymbol{G}_{r1}\right)\\=&\frac{1}{m!}\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j}f_i(x_1)g_j(x_1)\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1}\quad(*)\end{aligned}$$

又由归纳假设

$$\int_{[a,b]^{m-1}}\frac{1}{(m-1)!}\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=\frac{1}{(m-1)!}\boldsymbol{M}_{ij},$$

从而对 (*) 转化为先 $m-1$ 后 1 的累次积分，从而有设 $m_{ij}=\int_a^b f_i(x_1)g_j(x_1)\mathrm{d}x_1$，则

$$\int_{[a,b]^m}\frac{1}{m!}\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j}f_i(x_1)g_j(x_1)\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$$
$$=\frac{1}{m}\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j}m_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m(-1)^{i+j}m_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}=\det\boldsymbol{M}.$$

综上我们完成了证明.

笔记 利用本题的这一很难注意到的恒等式，我们可以得到如下 Cauchy 不等式的推广：

推论 10.4 (Cauchy 不等式推广)

在上题中，我们取 $g_k(x)=f_k(x)(k=1,\cdots,m)$，从而我们有

$$\begin{vmatrix}\int_a^b f_1^2(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_1(x)f_m(x)\mathrm{d}x\\ \vdots & & \vdots\\ \int_a^b f_m(x)f_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_m^2(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}\ge 0,$$

且等号成立当且仅当 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 线性相关.

下面两个是类似的困难问题，

命题 10.29

设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且对任意面积为 1 的长方形区域 R，均有

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证明：$f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上恒等于 0.

证明 事实上，只需证明任意面积为 1 且两边分别平行于坐标轴的长方形区域 R 都有 $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 的情形. 而为了利用上积分为 0，自然想到结合方形领域，可以借助二重变限积分转化为四个点处函数值的关系.

设 $F(s,t)=\int_0^s\mathrm{d}u\int_0^t f(u,v)\mathrm{d}v$，则得到对面积为 1 的方形领域，不妨引入参数 $c>0$，则四个顶点可表示为

$$(x,y),\quad\left(x,y+\frac{1}{c}\right),\quad\left(x+c,y+\frac{1}{c}\right),\quad(x+c,y),$$

则我们有

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-F(x,y)+F\left(x,y+\frac{1}{c}\right)-F\left(x+c,y+\frac{1}{c}\right)+F(x+c,y)=0\quad(*),$$

为了进一步研究性质，我们考虑对 (*) 关于 c 求偏导，即得

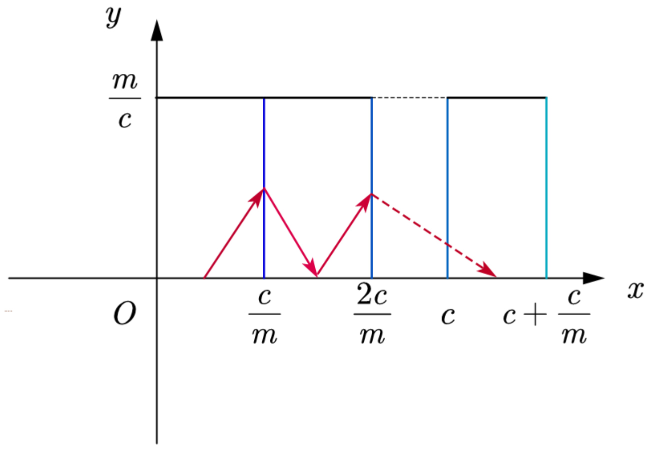
$$-\frac{1}{c^2}F_t'\left(x,y+\frac{1}{c}\right)-F_s'\left(x+c,y+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{c^2}F_t'\left(x+c,y+\frac{1}{c}\right)+F_s'(x+c,y)=0.$$

而我们注意到 $F_s'(s,t)=\int_0^t f(u,v)\mathrm{d}v$，$F_t'(s,t)=\int_0^s f(u,v)\mathrm{d}u$，则我们可以将上式化简为：

$$c\int_y^{y+1/c}f(x+c,v)\mathrm{d}v=\frac{1}{c}\int_x^{x+c}f\left(u,y+\frac{1}{c}\right)\mathrm{d}u,$$

这即表面对一方形领域，$f(x,y)$ 在有公共端点的两条边上积分均值相等，这表明，如果将 $\mathbb{R}^2$ 划分为全等的面积为 1 的长方形网格，则每条横线与竖线上的积分均值全部相等，因此我们考虑对任意 c 以及 $m\in\mathbb{N}^*$，在下图的情形中，我们有

$$f(\xi_m,0)=\frac{m}{c}\int_0^{c/m}f(u,0)\mathrm{d}u=\frac{m}{c}\int_0^{2c/m}f(u,0)\mathrm{d}u=\cdots=\frac{m}{c}\int_0^{c+c/m}f(u,0)\mathrm{d}u=f(c+\xi_m',0),$$



$$\frac{m}{c}\int_0^{\frac{c}{m}} f(u,0)\mathrm{d}u=\frac{m}{c}\int_m^{c+\frac{c}{m}} f(u,0)\mathrm{d}u$$

图 10.5

其中用到了积分中值定理，进而令 $m\to\infty$，则由连续性可知 $f(0,0)=f(c,0)$，因此任意平行于 x 轴上的点的函数值相等，同理平行于 y 轴的直线上的点的函数值也均相等，进而可知 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的常数函数，进而结合积分值为 0 可知，常数为 0，即证 $f(x,y)\equiv 0$.

笔记 本题的核心思想在于，借助二元的变限积分转化问题，其中发现长方形边上积分均值相等是一个非常重要且不平凡的观察，这也为我们证明函数常值打开了思路，可以通过网格方式进行递推.

命题 10.30 (1977，第 38 届 Putnam 数学竞赛)

设 $f(x,y)$ 是定义在 $I=[0,1]^2$ 上的实值可积函数，对任意的 $(a,b)\in I$，我们定义 $I(a,b)$ 是以 (a,b) 为中心且各边与 I 的边平行的完全包含在 I 内正方形中的最大一个，如果对任意 $(a,b)\in I$，有

$$\iint_{I(a,b)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(1) 判断 $f(x,y)$ 在 I 上是否恒等于 0？

(2) 若 $f(x,y)$ 在 I 上连续，证明：$f(x,y)$ 在 I 上恒等于 0.

解 (1) 显然不一定恒为 0，事实上我们考虑 Riemann 函数的推广

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x+q_y} & x=\dfrac{p_x}{q_x},y=\dfrac{p_y}{q_y}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\ \lor\ y\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

从而显然其不连续点为全体有理点，因此构成 Lebesgue 零测集，进而可积，而显然其任意区域上 Darboux 下和均为 0，因此可知其在任意区域上重积分为 0，但其函数值不恒为 0，故为一反例.

笔记 上面这个反例不依赖于区域限制，也是上一题中去掉连续后的反例.

证明 (2) 对任意 $(a,b)\in I$，我们先证明有

$$V(a,b)=\iint_{[0,a]\times[0,b]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\equiv 0.$$

为了证明这个结果，我们递推地定义序列 (a_n,b_n) 如下，其中 $a_1=a$，$b_1=b$：

$$\begin{cases}a_{n+1}=\begin{cases}a_n-b_n, & a_n\ge b_n,\\ a_n, & a_n<b_n,\end{cases}\\ b_{n+1}=\begin{cases}b_n, & a_n\ge b_n,\\ b_n-a_n, & a_n<b_n.\end{cases}\end{cases}$$

事实上这么做地核心想法在于将大长方形逐步缩小成小长方形，同时还希望积分在这个区域缩小的过程中保持不变，于是我们就想到了：通过在长方形中减去邻轴正方形得到新长方形！.

因此进一步直观的理解可借助下左图，设 K_n 是以 $\min\{a_n, b_n\}$ 边长的正方形，则设 $T_n = [0, a_n] \times [0, b_n]$，则有 $T_{n+1} = T_n - K_n$，因此由题给条件知对任意 $n \in \mathbb{N}^*$，有

$$\iint_{K_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

进一步地，也即有

$$V(a_n, b_n) = V(a_{n+1}, b_{n+1}) + \iint_{K_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V(a_{n+1}, b_{n+1}).$$

则可知 $V(a, b) = V(a_n, b_n)$，而显然 $(a_n, b_n) \to (0, 0)$，故有 $V(a_n, b_n) \to 0$，从而即证 $V(a, b) = 0$.

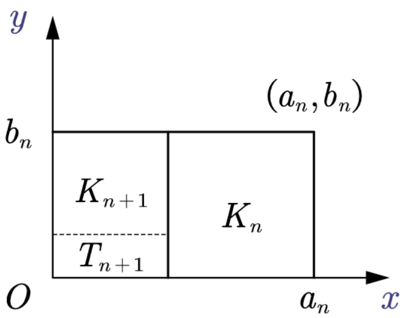


图 10.6: 递推产生小长方形 (巧妙!)

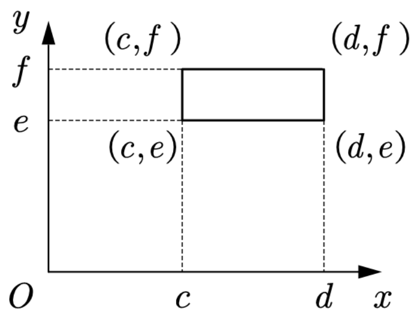


图 10.7: 借助引理转化

从而利用上述结论，我们不妨反证法，若存在点 (x_0, y_0)，使得 $f(x_0, y_0) > 0$，则由连续性的保号性知，存在矩形领域 $R = [c, d] \times [e, f]$ 使得任意 $(x, y) \in R$，有 $f(x, y) > 0$，即有

$$0 < \iint_R f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V(d, f) + V(c, e) - V(c, f) - V(d, e) = 0,$$

矛盾！因此我们可知 $f(x, y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上恒等于 0，即证！

笔记 本题的难点在于题干中正方形定义的方式比较迷惑，实质上就是一个至少有一边与坐标轴重合的正方形，因此如果从中心的角度去看就基本上做不出来了，但本题巧妙借助区域的加减运算来反馈积分值，非常精妙！

下面补充重积分求极限结果，不给出证明.

命题 10.31

- 若 $f(x, y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上一阶连续可微，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_{[0,1]^2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(1, y) - f(0, y))\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x, 1) - f(x, 0))\mathrm{d}x,$$

- 若 $f(x, y)$ 在 $[0, 1]^2$ 二阶连续可微，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_{[0,1]^2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}, \frac{2j-1}{2n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{24}\iint_{[0,1]^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

笔记 上面两个结果都可以在定积分中找到对应的版本，这里不再赘述，但需要注意的是，对这类问题的解决办法就是将积分区域划分成若干小块，从而对积分号内做 Taylor 展开，用 Lagrange 中值定理转化成新积分的定义式，从而取极限可得到新积分，进行计算. 除此之外，一个自然的考虑是，是否可以推广到 m 维的情形？

10.5 n 重积分的极限问题

本节问题主要关于 n 重积分求极限，这类问题的主要想法在于对极限值进行拟合估计 (与定积分类似).

命题 10.32

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

证明 不妨设 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$(平移不变性)，从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得任意 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$，均有 $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，进一步由连续性可设 $|f(x)|\le M$，即有上界 M，进而设 $X=(x_1,\cdots,x_n)$，且

$$\sigma(X)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

则我们将 $[0,1]^n$ 分成两个区域 D、E 的不交并，其中

$$D=\left\{X\in[0,1]^n\middle|\left|\sigma(X)-\frac{1}{2}\right|<\delta\right\},\quad E=\left\{X\in[0,1]^n\middle|\left|\sigma(X)-\frac{1}{2}\right|\ge\delta\right\}.$$

因此我们可以对 n 重积分做如下估计：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|\\
\le&\left|\int_D f(\sigma(X))\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|+\left|\int_E f(\sigma(X))\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|\\
\le&\int_D |f(\sigma(X))|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\int_E |f(\sigma(X))|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\
\le&\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_D \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+M\cdot\int_E \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\le\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\int_E \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n
\end{aligned}$$

从而现在来估计区域 E 的大小，为了嵌入 E 中 X 的条件，我们创造性的对 1 进行放缩，注意到

$$\int_E 1\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\le\int_E\frac{\left(\sigma(X)-\frac{1}{2}\right)^2}{\delta^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n<\frac{1}{\delta^2}\cdot\int_{[0,1]^n}\left(\sigma(X)-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

而我们又利用对称性可以计算得：

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n}\left(\sigma(X)-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\
=&\frac{1}{n^2}\int_{[0,1]^n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i\ne j}x_ix_j\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n-\frac{1}{n}\int_{[0,1]^n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\frac{1}{4}\\
=&\frac{1}{n^2}\cdot\left(n\int_{[0,1]^n}x_1^2\mathrm{d}X+(n^2-n)\int_{[0,1]^n}x_1x_2\mathrm{d}X\right)-\frac{1}{n}\cdot n\int_{[0,1]^n}x_1\mathrm{d}X+\frac{1}{4}=\frac{1}{12n}.
\end{aligned}$$

从而我们有对固定的 ε 与 δ，存在 N 使得任意 $n>N$，均有 $\frac{M}{12n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$，从而有估计

$$\left|\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|<\varepsilon,$$

由 ε 的任意性即可知命题成立，即证.

笔记 本题首先值得学习的是这种一般的拟合逼近估计的方法，将积分内函数利用连续性与极限值靠近，进而进行分区域放缩 (注意！以前再定积分中是分段放缩估计，这里就自然变成分区域！)

另外一个值得学习的地方就是如何估计分走的区域，即函数值无法估计，只能通过估计分走区域测度充分小时，我们可以像上题那样，创造性地放缩从而将区域的特征拿进积分内，这个思想还是源自如何利用条件，非常精妙！一定要体会掌握.

另一个经典问题是

命题 10.33

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}=\frac{2}{3}.$$

但事实上，上面两题都可以归结为下面这个一般形式:

定理 10.3 (Kay. Z 2022)

设 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}_+$ 为连续有界函数，$f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 均为 $[0,1]$ 上的连续有界函数，若定义

$$\sigma_i(X)=\frac{f_i(x_1)+\cdots+f_i(x_n)}{n},\quad i=1,2,\cdots,m,$$

其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}F\left(\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=F\left(\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int_0^1 f_m(x)\mathrm{d}x\right).$$

证明 我们先考虑一个引理:

引理 10.2

对任意定义在 $[0,1]$ 上的连续函数 $h(x)$，且设

$$\sigma(X)=\frac{h(x_1)+\cdots+h(x_n)}{n},$$

对任意 $\delta>0$，记

$$H_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n\middle|\left|\sigma(X)-\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x\right|\geq\delta\right\},$$

则成立对 H_n 的估计

$$V(H_n)\leq\frac{1}{n\delta^2}\cdot\left[\int_0^1 h^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x\right)^2\right].$$

这部分的证明可以完全照搬上一题中的估计方法，先放缩 1，再利用对称性计算重积分结果即可.

回到原题，对任意 $\varepsilon>0$，由 F 连续性可知，存在 $\delta>0$，对任意 $|y_i-s_i|<\delta(1\leq i\leq m)$，均有 $|F(y_1,\cdots,y_m)-F(s_1,\cdots,s_m)|<\frac{\varepsilon}{2}$，其中 $s_i=\int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x$，从而我们设对任意 $1\leq i\leq m$,

$$A_i=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n\middle||\sigma(X)-s_i|<\delta\right\},\quad B_i=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n\middle||\sigma(X)-s_i|\geq\delta\right\}.$$

由引理可知 $V(B_i)\leq\frac{1}{n\delta^2}\cdot\left[\int_0^1 f_i^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]\triangleq\frac{M_i}{n\delta^2}$，且由平移不变性，我们不妨设 $F(s_1,\cdots,s_m)=0$，进而设 $|F|\leq M'$，且记 $\max\{M_1,\cdots,M_m,M'\}=M$，则我们有估计，其中 $A=\bigcap A_i$，$B=\bigcup B_i$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{[0,1]^n}F\left(\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|\\=&\left|\int_A F\left(\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|+\left|\int_B F\left(\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|\\\leq&\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^m\int_{B_i}|F(\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X))|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{mM^2}{n\delta^2}.\end{aligned}$$

从而存在 N 使得任意 $n>N$ 均有 $\left|\int_{[0,1]^n}F\left(\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right|<\varepsilon$，由 ε 的任意性即证!

笔记 这个定理给出了一般性问题的解答，顺便可以解决清疏数学的一篇推送题.

事实上，本题可以用概率论中的大数定律证明，其核心想法是构造独立分布变量，证明它们 a.s.(依概率分布) 到某一值，再将 n 重积分转化为数学期望，利用控制收敛定理交换极限次序进而得证，可参考B 站视频.

第 10 章 练习

1. 设 $0 < r \leq 1$，D_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭区域

$$D_n(r) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n | x_1 x_2 \cdots x_n \leq r\},$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} D_n(r) = 1.$$

2. 证明：由曲面 $(a, b, c, h > 0)$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{h}\exp\left(-\frac{\dfrac{z^2}{c^2}}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}}\right)$$

所围立体 Ω 的体积

$$V(\Omega) = \frac{\pi abc^2}{3h}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

3. 证明：由曲面 $(a, b, c > 0, n > 1)$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$$

所围立体 Ω 的体积

$$V(\Omega) = \frac{\pi^2 abc^2}{3nh\sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

4. 证明：由 $n-1$ 维超平面

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

所围的 n 维平行 $2n$ 维体 ω 的体积

$$V(\Omega) = \frac{2^n h_1 h_2 \cdots h_n}{|\det(a_{ij})|}.$$

5. 设 $D_n = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2, -\dfrac{h}{2} \leq x_n \leq \dfrac{h}{2}\right\}$，证明：

$$\int_{D_n} x_n^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{h^3}{12}\frac{(\sqrt{\pi}a)^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}.$$

6. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为正定阵，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, \cdots, b_n)$，$X = (x_1, \cdots, x_n)$，证明：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(X\boldsymbol{A}X^{\mathrm{T}}+2X\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+c)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det\boldsymbol{A}}}\exp\left(-\frac{\Delta_n}{\det\boldsymbol{A}}\right),$$

其中 $\Delta_n = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta} & c\end{pmatrix}$.

7. 设 $X_n = (x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n = D_n$，且对任意 $m \in \mathbb{N}^*$ 有

$$f_{2m,n}(X_n) = \cfrac{x_1^{2m}+\cdots+x_n^{2m}}{n+\cfrac{x_1^{2m-1}+\cdots+x_n^{2m-1}}{1+\cfrac{x_1^{2m-2}+\cdots+x_n^{2m-2}}{\ddots\,\cfrac{}{n+\cfrac{}{1+\cfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n+\cfrac{n(x_1+\cdots+x_n)}{n+x_1+\cdots+x_n}}}}}}},\quad f_{2m+1,n}(X_n) = \cfrac{x_1^{2m+1}+\cdots+x_n^{2m+1}}{n+\cfrac{x_1^{2m}+\cdots+x_n^{2m}}{1+\cfrac{x_1^{2m-1}+\cdots+x_n^{2m-1}}{\ddots\,\cfrac{}{n+\cfrac{}{n+\cfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{1+\cfrac{x_1+\cdots+x_n}{n+x_1+\cdots+x_n}}}}}}}.$$

若记 $a_m = \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{D_n} f_{m,n}(X_n)\mathrm{d}X_n$，计算 $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty}(a_{m-1}-a_m+a_{m+1}-\cdots)^2$.

第 11 章 曲线积分与曲面积分

11.1 第一型曲线积分

常规的，正确的，合理的，不落窠臼的，一针见血的，我们考虑对称性在计算第一型曲线积分中的妙用，其中，我们先看轮换对称性：

命题 11.1

求第一型曲线积分 $\oint_L x^2 \mathrm{d}s$，其中 L 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解 注意到曲线的轮换对称性，从而我们有

$$\oint_L x^2 \mathrm{d}s = \oint_L y^2 \mathrm{d}s = \oint_L z^2 \mathrm{d}s,$$

从而可知 $\oint_L x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \frac{R^2}{3}\oint_L \mathrm{d}s = \frac{2\pi R^3}{3}$，其中注意到曲线为过圆心的大圆.

笔记 除了这种的三元轮换对称，也存在如柱面的二元对称，从而要有凑起来的观察力.

下面的定理揭示了轴对称性与中心对称性：

定理 11.1

设 L 是可求长平面曲线，且 $f(X)$ 沿 L 的第一型曲线积分存在，则

- 若 L 关于 x 轴对称，且 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in L$，则 $\int_L f(X)\mathrm{d}s = 0$；
- 若 L 关于 y 轴对称，且 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in L$，则 $\int_L f(X)\mathrm{d}s = 0$；
- 若 L 关于原点对称，且 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in L$，则 $\int_L f(X)\mathrm{d}s = 0$.

利用上面这个结论不难证明下述命题：

命题 11.2

设 $L: x^2+y^2=1$，证明：$\oint_L (\tan x \sin y + \mathrm{e}^x y^3 + x\ln(y+2))\mathrm{d}s = 0$.

11.2 第二型曲线积分

定义 11.1 (梯度曲线)

设 f 是区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 函数，并设 ∇f 是在 D 上处处不为 0 的向量. 若 Γ 是自某点 $(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 出发的可微曲线，它的每一点的切线方向与 f 的梯度方向一致，就称 Γ 为 f 在 D 上的**梯度曲线**.

对任一 $f\in C^1(D)$，注意到设 Γ 的参数方程为

$$x^1 = x^1(t), x^2 = x^2(t), \cdots, x^n = x^n(t),$$

则我们若选取 $x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)$ 满足如下常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x^n}, \quad x^i(0) = x_0^i (1\le i\le n),$$

由常微分方程组的存在性与延拓定理，可知 $x^i(t)$ 均在 D 内存在，并可延伸到 ∂D.

上述材料说明，对任一函数 f，我们可以在其定义域内构作一条曲线，且曲线上每一点的切向量都恰为这一点对应 f 值的梯度向量，因此我们往往就可以考虑 ∇f 在梯度曲线上的积分，实现一些不平凡的估计，而这种估计往往有效的本质在于：函数沿梯度方向增长最快.

需要强调的是，梯度曲线另一大重要性质在于，梯度曲线的弧长微分有简单的表示：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x_1'(t)]^2+\cdots+[x_n'(t)]^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{|\nabla f|}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t.$$

下面我们通过证明**高维中值定理**来展现梯度曲线的重要作用，并用高维中值定理得到第二十八届 Putnam 竞赛 B6 的最佳估计.

命题 11.3 (高维中值定理)

设 $f(X)$ 为定义在以 r 为半径的 n 维球

$$D=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leq r^2\}$$

上的连续可微函数，则存在点 $X_0\in D$，使得

$$\max_{X\in D}f(X)-\min_{X\in D}f(X)=|\nabla f(X_0)|\cdot 2r.$$

以下证明来自《The American Mathematical Monthly》，将沿着其原本思路进行重写：

引理 11.1

若 $f\in C^1(D)$，且处处有 $\nabla f\neq\mathbf{0}$(即 f 无临界点)，则每条梯度曲线都可以双向延拓到 ∂D.

这个引理即为定义 11.1 中所说的 ODE 中的结论，不为讨论重点，证明从略.

引理 11.2 (最核心的估计)

若 $f\in C^1(D)$，则成立

$$\min_{X\in D}|\nabla f|\leq\frac{\max\limits_{X\in D}f(X)-\min\limits_{X\in D}f(X)}{2r}\leq\max_{X\in D}|\nabla f|.$$

证明 我们先考虑左侧的不等式，一方面若 f 在 D 上存在临界点，即 $\nabla f=\mathbf{0}$，则显然成立左侧；另一方面，若 f 不存在临界点，即处处 f 梯度非零，从而我们考虑一条从原点出发的梯度曲线 Γ，则由引理 11.1 可知其可以延拓到 ∂D 上，设其参数方程为

$$x^1=x^1(t),x^2=x^2(t),\cdots,x^n=x^n(t),\quad t\in[0,T].$$

其中起点 $X(0)$，终点 $X(t)$ 均在边界上，从而我们由曲线积分公式

$$\begin{aligned}f(X(T))-f(X(0))&=\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i'(t)\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i'(t)}{\sqrt{[x_1'(t)]^2+\cdots+[x_n'(t)]^2}}\right)\cdot\sqrt{[x_1'(t)]^2+\cdots+[x_n'(t)]^2}\mathrm{d}t\\&=\int_\Gamma(\nabla f(X)\cdot\tau)\mathrm{d}s\qquad(\text{这个结果可以与}f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\text{类比}).\end{aligned}$$

从而我们不难得到

$$\max_{X\in D}f(X)-\min_{X\in D}f(X)\geq|f(X(T))-f(X(0))|\geq\int_\Gamma|\nabla f||\mathrm{d}s|\geq\min_{X\in D}|\nabla f|\cdot L_\Gamma,$$

又由 Γ 经过原点，且初末位置均在边界上，从而不难得到 $L_\Gamma\geq 2r$，故左边不等式成立.

对于右侧不等式，由于 D 为有界闭集，从而存在 $f(X_1)=\max f,f(X_2)=\min f$，则考虑线段 $\overline{X_1X_2}$，则有

$$\max_{X\in D}f(X)-\min_{X\in D}f(X)=\int_{\overline{X_1X_2}}\langle\nabla f,\mathrm{d}s\rangle\leq\max_{X\in D}|\nabla f|\cdot\overline{X_1X_2}\leq\max_{X\in D}|\nabla f|\cdot 2r.$$

因此根据引理 11.2，我们利用连续函数 $|\nabla f|$ 在有界闭集 D 上的性质，可知存在 X_0，使得

$$\max_{X\in D} f(X)-\min_{X\in D} f(X)=|\nabla f(X_0)|\cdot 2r.$$

这即完成了高维中值定理的证明，其中蕴含最本质的思想就是类似于 Netwon-Libiniz 公式的结果.

命题 11.4 (28th，普特南 B6 加强)

设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 具有连续的一阶偏导数，且满足 $|f(x,y)|\le 1$，对任意 $(x,y)\in D$. 证明：存在 $X_0\in D$，使得 $(f_x^2+f_y^2)|_{X_0}\le 1$.

证明 由高维中值定理，从而存在 X_0 使得

$$|\nabla f(X_0)|=\frac{\max\limits_{X\in D} f(X)-\min\limits_{X\in D} f(X)}{2}\le 1,$$

这即意味着 $(f_x^2+f_y^2)|_{X_0}=|\nabla f(X_0)|^2\le 1$，即完成了这个问题的证明.

笔记 不难发现这个问题能直接的解决最大的利器来自于积分曲线，它可以很好的估计函数的差，且将这种估计借助积分曲线上的结构，转化为对梯度的估计，如果将其与一元函数进行类比，将会体会到自然与巧妙之处.

11.3 Green 公式

命题 11.5 (一个难题)

计算二重积分：

$$\iint_D \mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}.$$

解 我们不难发现对 $P(x,y)=\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x)$，$Q(x,y)=\mathrm{e}^y(y\sin x-x\cos x)$，有

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=-2\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x),$$

从而我们考虑计算第二型曲线积分

$$I=\oint_{\partial D}\frac{P(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{Q(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

其二阶微分形式为 0，从而我们考虑用 Green 公式，但易见 0 为奇点，从而考虑 $C_\varepsilon=\{(x,y)|x^2+y^2=\varepsilon^2\}$，取向为逆时针方向，进而我们在 $D\setminus C_\varepsilon^\circ$ 上有

$$I=\left(\oint_{\partial D}-\oint_{C_\varepsilon}\right)+\oint_{C_\varepsilon}=\oint_{C_\varepsilon},$$

这即表明 $I=\oint_{C_\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\iint_D \mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，对任意 $\varepsilon>0$，均成立，从而令 $\varepsilon\to 0^+$，则不难得到极限为 -2π，也即曲线积分值为 -2π，进而

$$\iint_D \mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$

笔记 抽离出这个问题本质，不难发现希望一个二重积分成立

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi f(0,0),$$

换句话说即希望积分值是一个区域形变下的不变量，因此我们希望一方面存在 P,Q 使得 $-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=f(x,y)$，另一方面，希望 $\mathrm{d}\left(\frac{P(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{Q(x,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\right)\equiv 0$，综合两方面即希望 P,Q 满足如下偏微分方程

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot Q+\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot P.$$

事实上，更本质地，这是**调和函数**的性质，而且有许多竞赛问题有类似的思想，下面先给出一个基本的结论，最终再解决两个 CMC 问题.

定理 11.2 (调和函数的重要性质)

设 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 C^2 函数，称 u 为**调和函数**，如果

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0,$$

其中 Δ 为 Laplace 算子，则对 $D=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$，成立

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_D u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \forall r>0,$$

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D} u(x,y)\mathrm{d}s,\quad \forall r>0.$$

证明 我们先证明曲线积分的版本，考虑含参变量积分

$$I(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D}u(x,y)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

因此由于 u 具有较好的光滑性，从而求导运算与积分运算可以交换顺序，这里我们有

$$\begin{aligned}I'(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D}\nabla u\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi r}\iint_D\Delta u\mathrm{d}S\equiv 0\quad(\text{这一步使用了 Green 公式})\end{aligned}$$

从而我们可知任意 $r>0$，有 $I'(r)=0$，从而 $I(r)$ 恒为常数，又不难得到 $\lim\limits_{r\to0^+}I(r)=u(x_0,y_0)$，从而即证.

进而我们考虑第一个二重积分，对于这类问题，我们可以统一的先极坐标换元，将其化为累次积分，从而可以将其中一部分转化为曲线积分进行求解：注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi r^2}\iint_D u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}u(x,y)\rho\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\mathrm{d}\rho\int_{\partial D_\rho}u(x,y)\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi\rho\cdot u(x_0,y_0)\mathrm{d}\rho=u(x_0,y_0)\end{aligned}$$

其中倒数第二步用到了上文中得到的结论，因此我们完成了证明.

笔记 由这个结论，我们也不难看到命题 11.5 的一个更本质证明：$\mathrm{e}^y\cos x$ 是一个调和函数，从而积分为 π 是平凡的.

在广泛的竞赛题中，直接出现调和函数的问题并不多，但是会出现 Lapalce 算子为一个函数的形式这类问题，从而考虑一个二重积分，这类问题的通法就是化为累次积分，用上述证明的思路去计算.

命题 11.6 (第十三章 A13)

设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$，$f(x,y)$ 在 D 上两次连续可微，且满足 $\Delta f=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$，证明：

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

证明 先作极坐标换元，并化为累次积分

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta\\=&\int_0^1r\mathrm{d}r\int_{\partial D_r}\left(\nabla f\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}s=\int_0^1r\mathrm{d}r\iint_{D_r}\Delta f\mathrm{d}S=\int_0^1r\mathrm{d}r\iint_{D_r}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_0^1r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^1r(1-\mathrm{e}^{-r^2})\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

照搬这个问题的解决方法，我们不难解决下面这两个赛题，第一个是第一届全国大学生数学竞赛初赛 T6，第二个是 2021 年全国大学生数学竞赛补赛题：

命题 11.7

设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$，$f(x,y)$ 在 D 上两次连续可微，若

(1)$\Delta f=x^2y^2$，则计算

$$\iint_D\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(2)$\Delta f=x^2+y^2$，计算

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\iint_{D_r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}.$$

11.4 曲线积分难题选解

第 12 章 Combinatorics Introduction by Prof. M.J

12.1 Inclusion and Enclusion Princinple

Firstly, we will give some basic notations:

定义 12.1

We denote $[n]$ as a set $\{1,2,\cdots,n\}$ .Further more, we consider 一个集合族 $\binom{[n]}{k}$,which contains all sets $I\subseteq A=[n]$ with $|I|=k$.

Ω be a ground set and $A_1,A_2,\cdots,A_n$ are all the subsets of Ω, in this section, our main theorem is to calculate

$$\left|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}\right|,$$

where $\overline{A_k}$ denotes that $\Omega\setminus A_k=A_k^c$.

We will give the **IEP formula** by some notations which will be definited as below,

定义 12.2

We denote $A_I=\bigcap\limits_{i\in I}A_i$, ie. $A_{\{2,4,6\}}=A_2\bigcap A_4\bigcap A_6$, Especially, $A_\varnothing=\Omega$.And now we denote S_k as

$$S_k=\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}|A_I|.$$

ie. $S_0=|A_\varnothing|=|\Omega|, S_1=\sum\limits_{i\in[n]}|A_i|, S_2=\sum\limits_{I\in\binom{[n]}{2}}|A_I|=\sum\limits_{\{i,j\}\subseteq[n]}\left|A_i\bigcap A_j\right|.$

Thus we can give a 计算公式 of the equation above,

定理 12.1 (IEP formula)

Using the given notation, we have

$$\begin{aligned}\left|\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^n A_i\right|&=\left|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}\right|\\&=\sum_{k=0}^n(-1)^kS_k=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}|A_I|\end{aligned}$$

For $X\in\Omega$, let its characterization function be

$$\mathbb{1}_X(x)=\begin{cases}1 & x\in\Omega\\0 & x\notin\Omega\end{cases}.$$

Then we will prove a stronger lemma in two ways, the lemma is as below:

引理 12.1

$$\mathbb{1}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}}(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}\mathbb{1}_{A_I}(x).$$

证明 Assuming that x is contained in l sets in $\{A_1,\cdots,A_n\}$. If $l=0$, which is $x\in\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}$, then $LHS=1$,

$$RHS = (-1)^0 \mathbb{1}_{A_\varnothing}(x) = \mathbb{1}_\Omega(x) = 1,$$

then we have $LHS = RHS$.

If $l \geq 1$, without loss of generation, we assume that $x \in A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_l$, thus we have

$$\sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \mathbb{1}_{A_I}(x) = \sum_{I \in \binom{[l]}{k}} \mathbb{1}_{A_I}(x) = \left|\binom{[l]}{k}\right| = \binom{l}{k}.$$

thus we have

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \mathbb{1}_{A_I}(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \cdot \binom{l}{k} = (1-1)^l = 0.$$

However, if we notice a key observation, the proof will be quite simple:

证明 We denote A as $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$, then we can notice that :

$$\left(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_1}\right)\left(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_2}\right) \cdots \left(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_n}\right) \equiv 0.$$

And we have $(\mathbb{1}_X(x))^k = \mathbb{1}_X(x)$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_\Omega(x) - \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}(x)$,so we expand the equation above,and using

$$\mathbb{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_l}} = \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}},$$

then we can prove the lemma.

Back to the IEP formula, from the lemma, we add all $x \in \Omega$ up, we have:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \cdots \bigcap \overline{A_n}\right| &= \sum_{x \in \Omega} \left(\mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}}(x)\right) \\
&= \sum_{x \in \Omega} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \mathbb{1}_{A_I}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left(\sum_{x \in \Omega} \mathbb{1}_{A_I}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |A_I|
\end{aligned}$$

then we finish the proof.

笔记 when we try to use IEP to calculate, we usually need to find a combinational background, make some sets, then **enclude** them to form the set we want, here is some useful applications.

命题 12.1 (The number of Derangement)

A permutation $\sigma : [n] \to [n]$ is called a derangement of $[n]$ if $\sigma(i) \neq i$ for all $i \in [n]$. Let D_n be the family of all derangement of $[n]$ then prove taht

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|D_n|}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

证明 Let

$$A_i = \{\text{all permutations } \sigma : [n] \to [n] \text{ such that } \sigma(i) = i\}.$$

Then

$$D_n = A_1^c \bigcap A_2^c \bigcap \cdots \bigcap A_n^c \text{ and } \quad |A_I| = (n - |I|)!.$$

By Inclusion-Exclusion formula, we get

$$|D_n| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} |A_I| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} (n-|I|)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

as desired.

命题 12.2 (Mobius Inversion Formula)

$f(n)$ and $g(n)$ be two function defined for every integer n and satisfying

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

then prove taht

$$g(n) = \sum_{d|n}\mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right),$$

where $\mu(n)$ is Mobius function.

证明 Firstly, we prove that

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r} \geq 2 \end{cases}.$$

It is trivial to see that $\mu(1) = 1$, now we consider $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d) &= \sum_{0\leq i_k\leq a_k(1\leq k\leq r)} \mu(p_1^{i_1}\cdots p_r^{i_r}) \\ &= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\cdot(-1)^i = (1-1)^r = 0\end{aligned}$$

thus, we have:

$$\begin{aligned}g(n) &= \sum_{d|n}\mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\mu(d)\left(\sum_{q|\frac{n}{d}} g(q)\right) \\ &= \sum_{d|n}\sum_{q|\frac{n}{d}}\mu(d)g(q) = \sum_{q|n}\left(\sum_{d|\frac{n}{q}}\mu(d)\right)g(q) = g(n)\end{aligned}$$

where the last equal sign exist for the conclusion above.

12.2 Double Counting

第 13 章 普特南、IMC 及国际竞赛题选解

内容提要

- 本章内容主要从 Putnam 数学竞赛、IMC 以及其他竞赛中选取题目进行解答，其中有些题目已在前文中涉猎，这里便不再收录.

13.1 一元微积分

命题 13.1 (2021，Putnam，A2)

对任意正实数 x 定义

$$g(x)=\lim_{r\to0}\left((x+1)^{r+1}-x^{r+1}\right)^{\frac{1}{r}},$$

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ 的值.

解 由 Largrange 中值定理，我们有存在 $\xi_x\in(x,x+1)$ 使得 $(x+1)^{r+1}-x^{r+1}=(r+1)\xi_x^r$，从而

$$g(x)=\lim_{r\to0}\left((r+1)\xi_x^r\right)^{\frac{1}{r}}=\xi_x\cdot\lim_{r\to0}\exp\left(\frac{\ln(r+1)}{r}\right)=\mathrm{e}\cdot\xi_x,$$

故结合 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x}=1$，从而由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\mathrm{e}$.

笔记 见到差分就应当想到利用 Lagrange 中值定理，属于基础题.

13.2 多元微积分

13.3 级数理论

命题 13.2 (2021，Putnam，A3)

设 $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \sin(a_{n-1})(n \geq 1)$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

证明 显然 a_n 单调递减且有界，从而 $\{a_n\}$ 收敛，则有不动点可知收敛到 0，从而由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} na_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/a_n^2} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 - a_n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x-\sin x)(x+\sin x)} = 3,$$

从而可知 $a_n^2 \sim \dfrac{3}{n}$，从而由调和级数发散可知，级数发散，即证.

13.4 高等代数

命题 13.3 (2014 第六届 CMC，T5 推广)

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ 为多项式，且满足 $f(1) = g(0)$，$f'(1) \neq 0$，对给定的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

证明：矩阵方程 $f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{J})$ 总有解，其中约定 $\boldsymbol{J}^0 = \boldsymbol{I}_n$.

证明 我们将采取构造的方式给出方程的解，设 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} + x_1\boldsymbol{J} + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{J}^{n-1}$，其中注意到 $\boldsymbol{J}$ 为幂零的，即 $\boldsymbol{J}^n = \boldsymbol{O}$，从而设 $f(x) = a_1x^{n_1} + \cdots + a_kx^{n_k}$，$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$(注意到 $\boldsymbol{J}$ 幂零，从而不妨假设 g 的次数不超过 $n-1$)，从而显然对比 $f(\boldsymbol{X})$ 与 $g(\boldsymbol{J})$ 的常数项，由 $f(1) = g(0)$ 可知 $f(1)\boldsymbol{I} = g(0)\boldsymbol{I}$.

下面去构造 $x_1, \cdots, x_{n-1}$，对任意 $n_i (1 \le i \le k)$，我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{n_i} &= \left(\boldsymbol{I} + x_1\boldsymbol{J} + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{J}^{n-1}\right)^{n_i} \\ &= \boldsymbol{I} + n_ix_1\boldsymbol{J} + (n_ix_2 + \Gamma_1(x_1))\boldsymbol{J}^2 + \cdots + (n_ix_{n-1} + \Gamma_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}))\boldsymbol{J}^{n-1} \end{aligned}$$

其中 $\Gamma_i(x_1, \cdots, x_i)$ 表示仅跟 $x_1, \cdots, x_i$ 有关的多项式，从而对比系数，即考虑方程组：

$$\begin{cases} (a_1n_1 + \cdots + a_kn_k)x_1 = b_1, \\ (a_1n_1 + \cdots + a_kn_k)x_2 + (a_1 + \cdots + a_k)\Gamma_1(x_1) = b_2, \\ \cdots \\ (a_1n_1 + \cdots + a_kn_k)x_k + (a_1 + \cdots + a_k)\Gamma_{k-1}(x_1, \cdots, x_{k-1}) = b_k, \end{cases}$$

又注意到 $a_1n_1 + \cdots + a_kn_k = f'(1) \neq 0$，从而上述方程组有解，故可确定出一个解 $\boldsymbol{X}$，综上即证.

笔记 这个题本质上考察了对多项式的理解，对于 $\boldsymbol{J}$ 的多项式，就去找到一个对应的多项式相互匹配，最终完成题目，比较取巧.

第 14 章 竞赛模拟试题

14.1 第一套 (测试范围：数学分析 I)

一 (15 分)、

设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$，$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\pi^2}.$$

二 (15 分)、

定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足任取 $x_0\in[a,b]$，均有

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)\le f(x_0)$$

判断 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否有最大值?

三 (20 分)、

对任意小数部分不为 0.5 的实数 x，记 $<x>$ 表示距离 x 最接近的整数，对任意正整数 n，记：

$$a_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left\langle\sqrt{k}\right\rangle}\right)-2\sqrt{n}.$$

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并计算其极限 L;

(2) 证明：集合 $\left\{\sqrt{n}(a_n-L)|n\ge 1\right\}$ 在 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 上稠密.

四 (15 分)、

设 $a_n>0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=1$，证明：

$$\mathcal{H}=\left\{\sum_{n\in A}a_n\middle|A\subset\mathbb{N}^*\right\}$$

是闭集 (注意 A 可以为空集).

五 (20 分)、

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导数 $f'(x)$，我们记：

$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,M_{1+\alpha}=\sup_{x,y\in\mathbb{R},x\ne y}\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

其中 $\alpha\in(0,1]$，并且 $M_0,M_1,M_{1+\alpha}<+\infty$.

证明：存在只依赖于 α 的 $\lambda\in(0,1)$，满足：

$$M_1\le 2(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}}(M_0)^{1-\lambda}(M_{1+\alpha})^{\lambda}.$$

六 (15 分)、

A、B 是正整数集合 $\mathbb{N}^*$ 的两个无穷子集，且满足 $A\bigcap B=\varnothing$、$A\bigcup B=\mathbb{N}^*$，对于任意的正整数 c，是否总存在递增的数列 $\{a_n\}\subset A$、$\{b_n\}\subset B$，且使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$$

14.2 第二套 (测试范围：点集拓扑，多元函数)

一 (20 分)、

(1) 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{1+k+m}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{1+k+n};$$

(2) 计算:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^{n-k}(-1)^k}{k+1}}.$$

二 (15 分)、

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，$f(0)=f(1)$，α 是一个无理数，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\{k\alpha\})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

三 (20 分)、

设 A，B 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集，定义 $A+B$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一切形如 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的点组成的集合，其中 $\boldsymbol{x}\in A$，$\boldsymbol{y}\in B$.

(1) 若 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集，C 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，证明：$K+C$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集;

(2) 若 K，C 均为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，则试着举出一个反例使得 $K+C$ 不为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集.

四 (15 分)、

求所有函数 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$ 满足对任意垂直的向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，均有:

$$F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=F(\boldsymbol{u})+F(\boldsymbol{v}).$$

五 (20 分)、

设函数 f 在 $[a,b]$ 上处处大于 0，且存在 $L>0$ 使得任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$，又有

$$\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\alpha,\ \int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\beta.$$

证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x.$$

六 (10 分)、

设 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续函数，定义

$$F(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho)^2f(x+\theta)}{1-2\rho\cos x+\rho^2}\mathrm{d}x,$$

证明：对任意 $\theta_0\in\mathbb{R}$，二重极限 $\lim\limits_{(\rho,\theta)\to(1^-,\theta_0)}F(\rho,\theta)$ 存在，并求出其值.

14.3 第三套 (CMC 初赛模拟题 1)

一 (20 分)、

计算下列积分:

(1)

$$\int_{-2022}^{2022}\left\{\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\right\}\mathrm{d}x,$$

其中 $\{t\}$ 表示 t 的小数部分;

(2)

$$\int_{2021}^{2022}\left(x+\frac{1}{4x}\right)\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

二 (15 分)、

设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是 $n\times n$ 的复方阵, 且满足 $2\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}$, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=1$, 求证:

$$\boldsymbol{Y}^3=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}.$$

三 (15 分)、

求所有的连续函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 且满足对任意正实数 x, 有

$$f(x)\left(f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\geq(f(x)-1)^2.$$

四 (20 分)、

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 其特征值为 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$, 求证:

$$\lambda_{i+1}=\min_{0\neq\boldsymbol{x}\in V_i^{\perp}}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}(i=0,1,\cdots,n-1),$$

其中 E_i 为特征值 λ_i 对应的特征子空间, $V_i=E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_i$.

五 (15 分)、

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集, 则证明:

$$d(A)=d(\partial A).$$

这里 $d(S)$ 表示集合 S 的直径, 即 $d(S)=\sup\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$.

六 (15 分)、

设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上单位球面上的点, 则求

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sqrt{ij}}{i+j}x_ix_j$$

最小值.

14.4 第四套 (CMC 初赛模拟题 2)

一 (15 分)、

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 实正定矩阵，设 k 为大于 1 的正整数，

证明：

$$(\det(\boldsymbol{A}))^{1/n}\le\left(\frac{\operatorname{tr}^k(\boldsymbol{A})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^k)}{n^k-n}\right)^{1/k}.$$

二 (20 分)、

证明：对任意非负整数 $m\le n$ 有：

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{k+m}}{2k+1}\binom{n+k}{n-k}\binom{2k}{k-m}=\frac{1}{2n+1}.$$

三 (15 分)、

设 $x_k(1\le k\le 2n)$ 为实数，$\boldsymbol{C}$ 是 $2n\times 2n$ 阶的反对称矩阵，且 $c_{ij}=\cos(x_i-x_j)(1\le i<j\le 2n)$.

证明：

$$\det(\boldsymbol{C})=\cos^2(x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2n-1}-x_{2n}).$$

四 (15 分)、

设 f 是定义在 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，

计算：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x.$$

五 (15 分)、

设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的线性变换，且 $\boldsymbol{A}$ 为其表示矩阵，证明：存在 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{X}\ne\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 在数域 $\mathbb{P}$ 上可约.

六 (20 分)、

设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为区间，且函数 $F:I\times I\to\mathbb{R}$ 满足：

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}\ge 0\ge\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y},$$

设 $a_k\in I(1\le k\le n)$ 且满足 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$，且记 $a_{n+1}=a_1$，

证明：

$$\sum_{i=1}^{n}F(a_i,a_{i+1})\ge\sum_{i=1}^{n}F(a_{i+1},a_i).$$

14.5 第五套 (单元训练题——多元函数，矩阵相似)

一 (15 分)、

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$，证明不等式：

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}|\le|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}|\,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|.$$

二 (15 分)、

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶级复矩阵，证明：存在 $\delta>0$，使得对任意的 $s\in(0,\delta)$，下列矩阵均可对角化：

$$\boldsymbol{A}(s)=\begin{pmatrix}a_{11}+s & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+s & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+s\end{pmatrix}.$$

三 (15 分)、

设连续映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，满足

$$\varlimsup_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\frac{|\boldsymbol{x}-F(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|}<2,$$

证明：F 是满射.

四 (20 分)、

设 α,β 为正实数，且对 $n=2022$ 阶整数方阵，其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}[k_{11}\alpha] & \cdots & [k_{1n}\alpha]\\ \vdots & & \vdots\\ [k_{n1}\alpha] & \cdots & [k_{nn}\alpha]\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}[l_{11}\beta] & \cdots & [l_{1n}\beta]\\ \vdots & & \vdots\\ [l_{n1}\beta] & \cdots & [l_{nn}\beta]\end{pmatrix},$$

对任意不全相同整数 $k_{ij},l_{ij}(1\le i,j\le n)$，均有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似，证明：α 为有理数的充要条件是 β 为有理数.

五 (15 分)、

设 $\Omega\in\mathbb{R}^3$ 为凸区域，且 $P,Q\in\Omega$，证明：

$$|P-Q|=\sup_{f}\inf_{(x,y,x)\in\Omega}\frac{|f(P)-f(Q)|}{\sqrt{{f'_x}^2+{f'_y}^2+{f'_z}^2}},$$

其中 $\sup_f$ 是考虑所有从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续可微函数.

六 (20 分)、

设 f,g 是定义在 P 上的非负连续函数，其中 $P=[0,a_1]\times[0,a_2]\times\cdots\times[0,a_n]$，满足：

(i) 若 $\prod\limits_{j=1}^{n}x_j=0$，则 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)$，　(ii) 若 $\prod\limits_{j=1}^{n}x_j>0$，则 $f(x_1,\cdots,x_n)>0$.

证明：存在严格递增的连续函数 $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$，满足 $h(0)=0$，且若 $\prod\limits_{j=1}^{n}x_j>0$，则

$$h\circ g(x_1,\cdots,x_n)<f(x_1,\cdots,x_n).$$

14.6 第六套 (单元训练题——重积分)

一 (15 分)、

计算极限:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\int_{[0,x]^2}\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v}{u-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

二 (15 分)、

设 $f\in C([a,b]\times[-1,1])$，计算极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x,\sin tx)\mathrm{d}x.$$

三 (15 分)、

设实数 $a_1>0,a_2>0,\cdots,a_n>0(n\in\mathbb{N}^*)$，记 $D=\prod_{i=1}^{n}[0,a_i]$，计算

$$\int_D [x_1]\cdot[x_2]\cdots[x_n]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

四 (20 分)、

证明下面函数方程有**唯**一解

$$F(x_1,\cdots,x_n)=1+\int_0^{x_1}\mathrm{d}y_1\int_0^{x_2}\mathrm{d}y_2\cdots\int_0^{x_n}F(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_n.$$

五 (15 分)、

设 $a\in\mathbb{R}$，$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$，$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,x,y\ge 0\}$，讨论数列 $\{I_n(a)\}$ 的收敛性，其中

$$I_n(a)=n^a\int_D(1-x-y)^n f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

六 (20 分)、

对任意 $f\in C([0,1]^2)$，在下面两个极限中选一个计算:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\right)^2\int_{[0,1]^2}(xy(1-x)(1-y))^n f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_{[0,1]^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\right).$$

附加题 1、

设 f 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的光滑增函数，且 $f(0)=0$，又记区域 D_n 为

$$D_n=\{(x_1,\cdots,x_n)|f(x_1)+\cdots+f(x_n)\le 1\},$$

设 V_n 为区域 D_n 的体积，则证明: $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=0$

附加题 2、

记 C_n 表示 n 维球内接的体积最大的圆柱体的体积，B_n 表示 n 维球体积，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi\mathrm{e}}}.$$

其中 n 维圆柱体形如 $\left\{(x_1,\cdots,x_n)|x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\le r^2,a\le x_n\le b\right\}$.

注: *两题各计 10 分，单道题完整解出方计入成绩，但卷面总分不超过 100 分*

14.7 第七套 (CMC 模拟题 3)

一 (15 分)、

过 x 轴和 y 轴分别作动平面，交角 α 为常数，求交线的轨迹方程，并判断是何种类型的曲面.

二 (15 分)、

设 $p>0$，$q>-\dfrac{p^2}{4}$，$U_0=0$，$U_1=1$，且有 $U_{n+2}=pU_{n+1}+qU_n(n\geq 0)$，计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{U_1^2+\sqrt{U_2^2+\sqrt{U_4^2+\sqrt{\cdots+\sqrt{U_{2^{n-1}}^2}}}}}.$$

三 (15 分)、

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times m}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{P}^{m\times n}$，证明：矩阵方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$ 有解的充分必要条件是分块矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

相似.

四 (20 分)、

设 $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}f\left(n\middle/\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)g\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=f(0)g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

五 (15 分)、

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定实对称阵，求

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\right)$$

的最小值.

六 (20 分)、

证明：存在无穷多个正整数 n，使得

$$\sum_{d\mid n}d\leq\left\lfloor\sqrt{H_n+\mathrm{e}^{H_n}\ln H_n}\right\rfloor^2,$$

其中 $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

14.8 第八套 (数学分析 II 模拟期末)

一 (15 分)、

计算

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_0^A A^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$$

二 (15 分)、

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为满足下面方程的连续函数

$$f(x)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\arctan x,$$

计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

三 (15 分)、

对任意定义在 $[0,1]$ 上的实值连续函数 $f(x)$，定义

$$\mu(f)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\quad V(f)=\int_0^1 (f(x)-\mu(f))^2\mathrm{d}x,\quad M(f)=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|.$$

证明：对任意定义在 $[0,1]$ 上的实值连续函数 f,g，成立

$$V(fg)\le 2V(f)M^2(g)+2V(g)M^2(f).$$

四 (20 分)、

设函数 $h(x,y)$ 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，且有连续的一阶偏导数，若存在实数 a,b 使得

$$h(x,y)=a\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)+b\frac{\partial h}{\partial y}(x,y),\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

且 $h(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界，求 $h(2022,824)$ 的值.

五 (25 分)、

设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]^2$ 上四次连续可微，在其边界 ∂D 上取值为 0，且

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|\le 2022,\quad (x,y)\in D.$$

证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|<15.$$