数学分析中的“升高维度”

朱凯

2021 级 省身班

2022 年 10 月 10 日

在许多数学分析问题中 (往往是积分不等式)，对于定积分 (甚至重积分)，我们往往可以借助一定的对称性，将 “一维” 的积分化为 “高维” 的积分，有时候能起到神奇的效果，本次报告主要分享一些能巧妙 “升高维度” 进行降维打击的一些问题.

1. “零维” 变 “高维” ——引入积分化离散为连续
2. 低维的积分化为更高维的积分
3. 杂例——计算广义积分与无穷级数

引入积分证明不等式——以矩阵正定为例

很多离散的问题，如果单纯从其原本形式出发，往往会遇到较大困难，但是如果恰当的引入积分，就可以去进行很多更细致的操作，比如可以用在下面证明矩阵正定的问题上，下面两个例子都是大家已经熟悉的：

黄利兵老师思考题

设 $a_1, \cdots, a_n$ 为互不相同的正实数，证明矩阵 $\left(\dfrac{1}{(a_i+a_j)^p}\right)_{n\times n}$ 正定，其中 $p>0$.

李军老师数学分析 II 课堂例题

设 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 均为平面上 Jordan 可测的有界闭区域，设

$$a_{ij} = V_J\left(D_i \bigcap D_j\right),$$

证明：矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定阵.

引入积分证明不等式——以矩阵正定为例

证明.

我们直接用定义证明，在表达式中可以通过引入积分，来转化 $\dfrac{1}{(a_i+a_j)^p}$，注意到：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{(a_i+a_j)^p} &= \frac{1}{\Gamma(p-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\int_0^{\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-a_it}\right)^2\mathrm{d}t \geq 0
\end{aligned}$$

□

证明.

核心想法是利用重积分来表示区域的 Jordan 测度.

由 n 个区域有界，可知存在 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形 H 使得 $D_i \subseteq H(1 \le i \le n)$，从而我们引入 H 上的特征函数 $\mathbb{1}_E(X)$，其中 E 为任一 H 的子集，有

$$\mathbb{1}_E(X) = \begin{cases} 1 & X \in E \\ 0 & X \notin H \setminus E \end{cases}.$$

因此可知 $\mathbb{1}_E(X)$ 的不连续点全体恰为 ∂E，故有当且仅当 E 为 Jordan 可测时，特征函数 $\mathbb{1}_E(X)$ 在 H 上 Riemann 可积，因此我们结合 $D_i \bigcap D_j$ 可测知其特征函数可积，进而可写做

$$a_{ij} = V_J\left(D_i \bigcap D_j\right) = \iint_H \mathbb{1}_{D_i \bigcap D_j}(X)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

证明.

而由特征函数的性质我们可知 $\mathbb{1}_{D_i \bigcap D_j}(X) = \mathbb{1}_{D_i}(X) \cdot \mathbb{1}_{D_j}(X)$，因此我们有对任意 $x_1, \cdots, x_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \iint_H x_i \mathbb{1}_{D_i}(X) \cdot x_j \mathbb{1}_{D_j}(X) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_H \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{D_i}(X) \cdot x_j \mathbb{1}_{D_j}(X) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_H \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{D_i}(X) \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$$

□

这个例子再一次揭示了重积分的用处，可以将离散量连续化，便于整体处理.

注释

在上面两个例子中，我们已经可以感受到引入积分的强大威力——其本质在于，引入积分后可以实现配方的操作！这种思想将贯穿本次报告.

下面这个例子比较特殊，展示了如何如理 $|\cdot|$，min，max 这类函数，回顾上一个问题，我们不难想到引入积分的一个很关键工具在于引入“特征函数”进行刻画.

国家集训队测试题

已知 $x_1,\cdots,x_m$，$y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{R}^+$，记 $X=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$，$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，证明：

$$2XY\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}|x_i-y_j|\ge X^2\sum_{1\le i,j\le n}|y_i-y_j|+Y^2\sum_{1\le i,j\le m}|x_i-x_j|.$$

证明.

设 $x, a > 0$，则我们定义 $f_a(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, a] \\ 0 & x \in (a, +\infty) \end{cases}$，从而我们容易看见：

$$|a - b| = a + b - 2\min\{a, b\} = a + b - 2\int_0^{\infty} f_a(x) f_b(x) \mathrm{d}x.$$

□

进而我们有：

$$
\begin{aligned}
2XY \sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} |x_i - y_j| &= 2XY \sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \left(x_i + y_j - 2\int_0^{\infty} f_{x_i}(x) f_{y_j}(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= 2XY(nX + mY) - 4XY \sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \left(\int_0^{\infty} f_{x_i}(x) f_{y_j}(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= 2XY(nX + mY) - 4XY \int_0^{\infty} \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} f_{x_i}(x) f_{y_j}(x) \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

类似地也有：

$$
\begin{aligned}
X^2 \sum_{1\le i,j\le n} |y_i - y_j| &= X^2 \sum_{1\le i,j\le n} \left(y_i + y_j - 2\int_0^{\infty} f_{y_i}(x) f_{y_j}(x) \mathrm{d}x \right) \\
&= 2nX^2Y - 2X^2 \int_0^{\infty} \left(\sum_{1\le i,j\le n} f_{y_i}(x) f_{y_j}(x) \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

同理有 $Y^2 \sum_{1\le i,j\le m} |x_i - x_j| = 2mY^2X - 2Y^2 \int_0^{\infty} \left(\sum_{1\le i,j\le m} f_{x_i}(x) f_{x_j}(x) \right) \mathrm{d}x$

因此由：

$$X^2\int_0^{\infty}\left(\sum_{1\le i,j\le n} f_{y_i}(x)f_{y_j}(x)\right)\mathrm{d}x+Y^2\int_0^{\infty}\left(\sum_{1\le i,j\le m} f_{x_i}(x)f_{x_j}(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$-2XY\int_0^{\infty}\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} f_{x_i}(x)f_{y_j}(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\left[X\sum_{i=1}^{n} f_{y_i}(x)-Y\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(x)\right]^2\mathrm{d}x\ge 0,\text{ 即可得证原不等式！}\qquad\square$$

引入积分证明等式

在上述不等式的例子中，我们可以更进一步产生这种感觉——引入积分后，不好求和的变得更容易求和！因此将其引入恒等式的证明也是有效的.

一道 B 组练习题的副产物

证明组合恒等式：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!} = \frac{2}{(2n+1)\cdot(n-1)!}.$$

化为高维的积分，消除平方项——用变量个数增加消解次数的升高

用于积分不等式的反向估计

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不恒为 0，满足 $0 \le f(x) \le M$，若

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 + \Delta,$$

证明:

$$0 \le \Delta \le M^2\left((b-a)^2 + 2 - 2\cos(b-a)\right) \le \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

证明.

我们考虑将定积分转化为二重积分，因为这样就可以处理原本无法运算的平方式:

$$A=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$B=\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$C=\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2=\iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明.

从而我们有：

$$\Delta = A - B - C = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left(1 - \sin x \sin y - \cos x \cos y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left(1 - \cos(x-y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le M^2 \iint_{[a,b]^2} \left(1 - \cos(x-y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (*)$$

因此利用二重积分的表达式，容易得到 $\Delta \ge 0$，进一步计算 (*) 的积分结果，即有

$$\Delta \le M^2((b-a)^2 + 2 - 2\cos(b-a)),$$

且若将 $1-\cos(x-y)$ 放大为 $\dfrac{(x-y)^2}{2}$，则可得到后面的估计结果. □

注释

上题给我们了启示就是，定积分的结构中出现平方时，可以考虑转化成二重积分，这样便于直接加减运算和配方，值得学习！

同样的方法也可以用在重积分不等式中：

李军老师补充资料问题

设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上连续，证明：

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x$$
$$\leq\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2+\int_0^1\int_0^1[f(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

证明.

为了处理平方式，我们类比前几题的想法，考虑变为四重积分，等价于证明下式，

$$\int_D f(x,y)f(z,y)\mathrm{d}X + \int_D f(x,y)f(x,w)\mathrm{d}X \le \int_D f(x,y)f(z,w)\mathrm{d}X + \int_D [f(x,y)]^2\mathrm{d}X,$$

其中 $D=[0,1]^4$，$X=(x,y,z,w)$，则注意到对称性，则可写作：

$$\int_D \left(\sum_{cyc} (f(x,y))^2 + 2f(x,y)f(z,w) + 2f(x,w)f(z,y) - 2\sum_{cyc} f(x,y)f(z,y) \right) \mathrm{d}X \ge 0,$$

从而配方即等价于：

$$\int_D (f(x,y)+f(z,w)-f(x,w)-f(z,y))^2\,\mathrm{d}X \ge 0,$$

这是平凡成立的，综上我们证明了题给不等式成立. □

这样类似地问题还有很多，这种方法在证明反向不等式的适合尤为强大，这种方法还可以用来解决 2021 级伯苓动态进出考试题：

动态进出试题

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 J 可测区域，$f(X)$ 是定义在 D 上的可积函数，且 $\inf\limits_{X\in D}|f(X)|=m>0$，$\sup\limits_{X\in D}|f(X)|=M$，证明：

$$\left(\int_D f^2(X)\mathrm{d}\Omega\right)\left(\int_D \frac{1}{f^2(X)}\mathrm{d}\Omega\right)\leq\frac{[(m^2+M^2)V_J(D)]^2}{4m^2M^2}.$$

可以将这个乘积化为四重积分，从而利用 $(f(X)-m)(M-f(X))\geq 0$ 这种手法进行处理，细节略去.

化为高维的积分，消除平方项——用变量个数增加消解次数的升高

下面这个例子是 Cauchy 不等式的推广，也很好的用到了这个思想：

Cauchy 不等式的推广

设 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$; 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明：

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_1(x)f_m(x)\mathrm{d}x \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b f_m(x)f_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_m^2(x)\mathrm{d}x \end{vmatrix} \geq 0,$$

且等号成立当且仅当 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 线性相关.

证明.

我们先证明一个更一般的引理：设 $f_1(x),\cdots,f_m(x);g_1(x),\cdots g_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则

$$\frac{1}{m!}\int_{[a,b]^m}\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} g_1(x_1) & \cdots & g_1(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m(x_1) & \cdots & g_m(x_m) \end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$$

$$=\begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_1(x)g_m(x)\mathrm{d}x \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b f_m(x)g_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_m(x)g_m(x)\mathrm{d}x \end{vmatrix}.$$

□

我们考虑对 m 用数学归纳法，注意到 $m=1$ 命题平凡，从而假设已有 $m-1$ 时成立命题，则设 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 表示第一个矩阵的 (i,j) 元的余子式，$\boldsymbol{G}_{ij}$ 表示第二个矩阵的 (i,j) 元的余子式，$\boldsymbol{M}_{ij}$ 表示第三个矩阵的 (i,j) 元的余子式，因此我们将行列式乘积两项均按第一列展开，即有：

$$
\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(x_1) & \cdots & g_1(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m(x_1) & \cdots & g_m(x_m) \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{m!}\left(\sum_{r=1}^{m} f_r(x_1)\cdot(-1)^{r+1}\boldsymbol{F}_{r1}\right)\left(\sum_{r=1}^{m} g_r(x_1)\cdot(-1)^{r+1}\boldsymbol{G}_{r1}\right)
$$

$$
= \frac{1}{m!}\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j} f_i(x_1)g_j(x_1)\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1} \quad (*)
$$

又由归纳假设

$$\int_{[a,b]^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \boldsymbol{F}_{i1} \boldsymbol{G}_{j1} \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m = \frac{1}{(m-1)!} \boldsymbol{M}_{ij},$$

从而对 (*) 转化为先 $m-1$ 后 1 的累次积分，从而有设 $m_{ij} = \displaystyle\int_a^b f_i(x_1) g_j(x_1) \mathrm{d}x_1$，则

$$\int_{[a,b]^m} \frac{1}{m!} \sum_{1 \le i,j \le m} (-1)^{i+j} f_i(x_1) g_j(x_1) \boldsymbol{F}_{i1} \boldsymbol{G}_{j1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{1 \le i,j \le m} (-1)^{i+j} m_{ij} \boldsymbol{M}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} m_{ij} \boldsymbol{M}_{ij} = \det \boldsymbol{M}.$$

综上我们证明了引理，进而我们取 $g_k(x) = f_k(x)(k = 1, \cdots, m)$，即可证明.

我们都知道对于一个凸函数，其本质刻画来自于 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 与 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 之间的关系，但这是两个变量的关系！往往定积分中只有一个变量，那么有时候利用对称性考虑 $f(x)+f(-x)$ 是有效的，但更一般的，我们就无法操作了，但是重积分可以提供两个变量的出现，为我们嵌入凸函数定义这个刻画提供了有利条件.

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛 T5

设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数，f 在 $[0,1]$ 上单调递增，又设 $g(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的下凸函数，证明：

$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x.$$

证明.

由 $g(x)$ 下凸，不难证明 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，从而不等式等价于

$$\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 f(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而更进一步不难用对称性化为

$$\int_0^1\int_0^1 \left(f(x)-f(y)\right)\left(h(x)-h(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0,$$

这是显然成立的. □

2019 伯苓班数分 II 期末压轴

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的上凸函数，$f(0)=1$. 证明：

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{12}.$$

证明.

取 $g(x)=f(x)-1$，从而 $g(x)$ 也是 $[0,1]$ 上的上凸函数，且 $g(0)=0$，从而只需证明

$$\frac{1}{3}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x.$$

又由 $g(x)$ 上凸，从而任意 $t\in[0,1]$，有 $g(tx)\geq tg(x)+(1-t)g(0)=tg(x)$，从而对任意 $0\leq x\leq y\leq 1$，有 $g(x)\geq \dfrac{x}{y}g(y)$ 也即 $yg(x)-xg(y)\geq 0$，进而我们有 $(y-x)(yg(x)-xg(y))\geq 0$. 又注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(y^2g(x)+x^2g(y)-xy\cdot g(x)-xy\cdot g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(y-x)(yg(x)-xg(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 0,
\end{aligned}$$

计算广义积分

有许多定积分 (这里泛指一元积分) 问题，直接计算难度很大，但如果恰当分离结构，拼凑出重积分的结构，则会产生许多出人意料的效果.

概率积分

证明下面概率积分：

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

化为二重积分

证明.

注意到：

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x,$$

而对任意 $a \in \mathbb{R}$，有 $D_1 \subseteq D \subseteq D_2$，其中

$$D_1 = \left\{x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq a^2\right\},\quad D_2 = [0,a]^2,\quad D_3 = \left\{x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 2a^2\right\}$$

则我们事实上有

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

化为二重积分证明 (续)

证明.

而

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right),$$

$$\iint_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a} r\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right).$$

从而令 $a\to\infty$，则由夹逼定理可知即证. □

注释

本题最精妙的地方在于，首先利用定积分不好计算，但联想到对于二重积分，$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 这种结构如果用极坐标换元，就会产生非常好的效果，就可以算出结果，因此本题就转化成重积分后，利用两个半圆区域夹逼即可的到结果.

计算无穷级数

第一届 CMC 数学类决赛 T5

利用重积分 $\displaystyle\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，证明 Euler-Passel 等式：

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

证明.

一方面，我们对 $\dfrac{1}{1-xy}$ 作展开

$$\frac{1}{1-xy}=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n,$$

从而由累次极限与重极限的关系，这里容易看见可以交换次序，即有

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y&=\iint_{[0,1]^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\iint_{[0,1]^2}(xy)^n\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\zeta(2)\end{aligned}$$

证明.(续)

另一方面，我们作换元，令 $x=u-v, y=u+v$(为什么这么做？消去交叉项的思想！)，从而显见，Jacobbi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2$，则我们利用对称性可以化为累次积分如下：

$$\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D'}\frac{1}{1-u^2+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=4\int_0^{1/2}\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}\mathrm{d}v+4\int_{1/2}^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}\mathrm{d}v(\text{利用对称性})$$

$$=4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u$$

证明.

又注意到（非常神奇的!!!）从而借助这个小观察，立即可以算出积分值为 $\frac{\pi^2}{6}$，即证原来等式.

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right),-\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

□

注释

注意这里在计算二重积分的时候，如果转化成：

$$\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x,$$

是毫无价值的，因为这等价于第一种算法，因此这也启发我们，如果将问题转化为二重积分来算，那么核心的突破口将出现在如何对二重积分进行合适的换元上!