数学分析中的“升高维度”

2021 级数学伯苓班　朱凯

在许多数学分析问题中 (往往是积分不等式)，对于定积分 (甚至重积分)，我们往往可以借助一定的对称性，将“一维”的积分化为“高维”的积分，有时候能起到神奇的效果，下面是一些例子.

1　“零维”变“高维”——引入积分化离散为连续

很多离散的问题，如果单纯从其原本形式出发，往往会遇到较大困难，但是如果恰当的引入积分，就可以去进行很多更细致的操作，比如可以用在下面证明矩阵正定的问题上，下面两个例子都是大家已经熟悉的：

例 1.1 (黄利兵老师思考题)**.** 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为互不相同的正实数，证明矩阵 $\left(\dfrac{1}{(a_i+a_j)^p}\right)_{n\times n}$ 正定，其中 $p>0$.

证明 我们直接用定义证明，在表达式中可以通过引入积分，来转化 $\dfrac{1}{(a_i+a_j)^p}$，注意到：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{(a_i+a_j)^p}&=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\int_0^{\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-a_it}\right)^2\mathrm{d}t\geq 0\end{aligned}$$

其中的细节当然不易想到和处理，但是其本质思想难点在于化**离散**的不等式为连续的积分. □

例 1.2 (国家集训队试题)**.** 已知 $x_1,\cdots,x_m$，$y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{R}^+$，记 $X=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$，$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，证明：

$$2XY\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}|x_i-y_j|\geq X^2\sum_{1\leq i,j\leq n}|y_i-y_j|+Y^2\sum_{1\leq i,j\leq m}|x_i-x_j|.$$

证明 设 $x,a>0$，则我们定义 $f_a(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,a]\\0 & x\in(a,+\infty)\end{cases}$，从而我们容易看见：

$$|a-b|=a+b-2\min\{a,b\}=a+b-2\int_0^{\infty}f_a(x)f_b(x)\mathrm{d}x.$$

(下面的细节处理并非本质想要说明的，故略去) □

举这个例子的核心目的在于对于一些离散的函数，如 $|\cdot|$，min，max，我们都可以通过一些类似于“特征函数”的方法化为积分.

下面这个例子是李军老师数学分析 II 课程中的一个例题，能更进一步说明这种思想：

例 1.3. 设 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 均为平面上 *Jordan* 可测的有界闭区域，设

$$a_{ij}=V_J\left(D_i\bigcap D_j\right),$$

证明：矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定阵.

证明 核心想法是利用重积分来表示区域的 Jordan 测度.

由 n 个区域有界，可知存在 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形 H 使得 $D_i \subseteq H(1 \le i \le n)$，从而我们引入 H 上的特征函数 $\mathbb{1}_E(X)$，其中 E 为任一 H 的子集，有

$$\mathbb{1}_E(X) = \begin{cases} 1 & X \in E \\ 0 & X \notin H \setminus E \end{cases}.$$

因此可知 $\mathbb{1}_E(X)$ 的不连续点全体恰为 ∂E，故有当且仅当 E 为 Jordan 可测时，特征函数 $\mathbb{1}_E(X)$ 在 H 上 Riemann 可积，因此我们结合 $D_i \bigcap D_j$ 可测知其特征函数可积，进而可写做

$$a_{ij} = V_J\left(D_i \bigcap D_j\right) = \iint_H \mathbb{1}_{D_i \cap D_j}(X)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而由特征函数的性质我们可知 $\mathbb{1}_{D_i \cap D_j}(X) = \mathbb{1}_{D_i}(X) \cdot \mathbb{1}_{D_j}(X)$，因此我们有对任意 $x_1, \cdots, x_n$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j &= \sum_{i,j=1}^n \iint_H x_i\mathbb{1}_{D_i}(X) \cdot x_j\mathbb{1}_{D_j}(X)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_H \left(\sum_{i,j=1}^n x_i\mathbb{1}_{D_i}(X) \cdot x_j\mathbb{1}_{D_j}(X)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_H \left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbb{1}_{D_i}(X)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge 0 \end{aligned}$$

□

综合上面三个例题，我们已经大致能感受到“升高维度”的一个作用——可以凑对配方，下面这个例子则可以展现引入积分的另一个好处——将不好求和的东西化为容易求和的

例 1.4 (一道 B 组练习题的副产物). 证明组合恒等式：

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!} = \frac{2}{(2n+1)\cdot(n-1)!}.$$

证明 核心观察是恒等式中的双阶乘结构，进而联想到 Wallis 公式

我们注意到：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}2^k\cdot k!}{(2k+1)!!\cdot k!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cdot\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\cdot\sin^{2k+1}x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n!}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=0}^n(-1)^{k}\binom{n}{k}\cdot\sin^{2k}x\right)\sin x - \sin x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n!}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\sin x - \sin x\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{2}{(2n+1)\cdot(n-1)!} \end{aligned}$$

□

小结： 通过上述例题，我们不难感受到化为积分这一“连续性”工具的好处，上面这些例题虽然都有较强的技巧性，但都蕴含着非常本质且朴素的想法：引入积分，在下一节中我们将进一步展现这种升高维度的技巧.

2 低维的积分化为更高维的积分

2.1 化为高维的积分，消除平方项——用变量个数增加消解次数的升高

例 2.1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不恒为 0，满足 $0 \le f(x) \le M$，若

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 + \Delta,$$

证明：

$$0 \le \Delta \le M^2((b-a)^2 + 2 - 2\cos(b-a)) \le \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

证明 我们考虑将定积分转化为二重积分，因为这样就可以处理原本无法运算的平方式：

$$A = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$B = \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$C = \left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}
&\Delta = A - B - C \\
&= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left(1 - \sin x\sin y - \cos x\cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left(1 - \cos(x-y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\le M^2 \iint_{[a,b]^2} \left(1 - \cos(x-y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (*)
\end{aligned}$$

因此利用二重积分的表达式，容易得到 $\Delta \ge 0$，进一步计算 (*) 的积分结果，即有

$$\Delta \le M^2((b-a)^2 + 2 - 2\cos(b-a)),$$

且若将 $1-\cos(x-y)$ 放大为 $\dfrac{(x-y)^2}{2}$，则可得到后面的估计结果. □

注： 本题给我们了启示就是，定积分的结构中出现平方时，可以考虑转化成二重积分，这样便于直接加减运算和配方，值得学习！

同样的方法也可以用在重积分不等式中：

例 2.2 (李军老师补充资料问题)**.** 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上连续，证明：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)^2 \mathrm{d}y + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\le \left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 [f(x,y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

证明 为了处理平方式，我们类比前几题的想法，考虑变为四重积分，等价于证明下式，

$$\int_D f(x,y)f(z,y)\mathrm{d}X + \int_D f(x,y)f(x,w)\mathrm{d}X \le \int_D f(x,y)f(z,w)\mathrm{d}X + \int_D [f(x,y)]^2\mathrm{d}X,$$

其中 $D=[0,1]^4$，$X=(x,y,z,w)$，则注意到对称性，则可写作：

$$\int_D\left(\sum_{cyc}(f(x,y))^2+2f(x,y)f(z,w)+2f(x,w)f(z,y)-2\sum_{cyc}f(x,y)f(z,y)\right)\mathrm{d}X\geq 0,$$

从而配方即等价于：

$$\int_D(f(x,y)+f(z,w)-f(x,w)-f(z,y))^2\,\mathrm{d}X\geq 0,$$

这是平凡成立的，综上我们证明了题给不等式成立. □

这样类似地问题还有很多，这种方法在证明反向不等式的适合尤为强大，这种方法还可以用来解决 2021 级伯苓动态进出考试题：

例 2.3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 J 可测区域，$f(X)$ 是定义在 D 上的可积函数，且 $\inf\limits_{X\in D}|f(X)|=m>0$，$\sup\limits_{X\in D}|f(X)|=M$，证明：

$$\left(\int_D f^2(X)\mathrm{d}\Omega\right)\left(\int_D\frac{1}{f^2(X)}\mathrm{d}\Omega\right)\leq\frac{[(m^2+M^2)V_J(D)]^2}{4m^2M^2}.$$

可以将这个乘积化为四重积分，从而利用 $(f(X)-m)(M-f(X))\geq 0$ 这种手法进行处理，细节略去.

下面这个例子是 Cauchy 不等式的推广，也很好的用到了这个思想：

例 2.4. 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$; 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积，证明：

$$\begin{vmatrix}\int_a^b f_1^2(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_1(x)f_m(x)\mathrm{d}x\\ \vdots & & \vdots\\ \int_a^b f_m(x)f_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_m^2(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}\geq 0,$$

且等号成立当且仅当 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 线性相关.

证明 我们先证明一个更一般的引理：设 $f_1(x),\cdots,f_m(x);g_1(x),\cdots g_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则

$$\frac{1}{m!}\int_{[a,b]^m}\begin{vmatrix}f_1(x_1)&\cdots&f_1(x_m)\\ \vdots&&\vdots\\ f_m(x_1)&\cdots&f_m(x_m)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}g_1(x_1)&\cdots&g_1(x_m)\\ \vdots&&\vdots\\ g_m(x_1)&\cdots&g_m(x_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$$

$$=\begin{vmatrix}\int_a^b f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_1(x)g_m(x)\mathrm{d}x\\ \vdots & & \vdots\\ \int_a^b f_m(x)g_1(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_m(x)g_m(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}.$$

我们考虑对 m 用数学归纳法，注意到 $m=1$ 命题平凡，从而假设已有 $m-1$ 时成立命题，则设 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 表示第一个矩阵的 (i,j) 元的余子式，$\boldsymbol{G}_{ij}$ 表示第二个矩阵的 (i,j) 元的余子式，$\boldsymbol{M}_{ij}$ 表示第三个矩阵的 (i,j) 元的余子式，因此我们将行列式乘积两项均按第一列展开，即有：

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}f_1(x_1)&\cdots&f_1(x_m)\\ \vdots&&\vdots\\ f_m(x_1)&\cdots&f_m(x_m)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}g_1(x_1)&\cdots&g_1(x_m)\\ \vdots&&\vdots\\ g_m(x_1)&\cdots&g_m(x_m)\end{vmatrix}\\ =&\frac{1}{m!}\left(\sum_{r=1}^m f_r(x_1)\cdot(-1)^{r+1}\boldsymbol{F}_{r1}\right)\left(\sum_{r=1}^m g_r(x_1)\cdot(-1)^{r+1}\boldsymbol{G}_{r1}\right)\\ =&\frac{1}{m!}\sum_{1\leq i,j\leq m}(-1)^{i+j}f_i(x_1)g_j(x_1)\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1}\quad(*)\end{aligned}$$

又由归纳假设

$$\int_{[a,b]^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!}\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m = \frac{1}{(m-1)!}\boldsymbol{M}_{ij},$$

从而对 (*) 转化为先 $m-1$ 后 1 的累次积分，从而有设 $m_{ij}=\displaystyle\int_a^b f_i(x_1)g_j(x_1)\mathrm{d}x_1$，则

$$\begin{aligned}&\int_{[a,b]^m}\frac{1}{m!}\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j}f_i(x_1)g_j(x_1)\boldsymbol{F}_{i1}\boldsymbol{G}_{j1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m\\ =&\frac{1}{m}\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j}m_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m(-1)^{i+j}m_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}=\det\boldsymbol{M}.\end{aligned}$$

综上我们证明了引理，进而我们取 $g_k(x)=f_k(x)(k=1,\cdots,m)$，即可证明. □

2.2 解决凸函数积分不等式的利器——化为重积分

我们都知道对于一个凸函数，其本质刻画来自于 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 与 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 之间的关系，但这是两个变量的关系！往往定积分中只有一个变量，那么有时候利用对称性考虑 $f(x)+f(-x)$ 是有效的，但更一般的，我们就无法操作了，但是重积分可以提供两个变量的出现，为我们嵌入凸函数定义这个刻画提供了有利条件.

例 2.5 (2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛 T5). 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数，f 在 $[0,1]$ 上单调递增，又设 $g(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的下凸函数，证明：

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由 $g(x)$ 下凸，不难证明 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，从而不等式等价于

$$\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1 f(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而更进一步不难用对称性化为

$$\int_0^1\int_0^1\left(f(x)-f(y)\right)\left(h(x)-h(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0,$$

这是显然成立的. □

注：遗憾的是这个例子并不足够好，最后实质上只是用重积分证明了一遍切比雪夫不等式，但下面这个例子就能十足展现重积分的威力.

例 2.6 (2019 伯苓班数分 II 期末压轴). 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的上凸函数，$f(0)=1$. 证明：

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{12}.$$

证明 取 $g(x)=f(x)-1$，从而 $g(x)$ 也是 $[0,1]$ 上的上凸函数，且 $g(0)=0$，从而只需证明

$$\frac{1}{3}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{2}\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x.$$

又由 $g(x)$ 上凸，从而任意 $t\in[0,1]$，有 $g(tx)\ge tg(x)+(1-t)g(0)=tg(x)$，从而对任意 $0\le x\le y\le 1$，

有 $g(x) \geq \dfrac{x}{y}g(y)$ 也即 $yg(x) - xg(y) \geq 0$，进而我们有 $(y-x)(yg(x)-xg(y)) \geq 0$. 又注意到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 y^2\mathrm{d}y\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(y^2g(x)+x^2g(y)-xy\cdot g(x)-xy\cdot g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(y-x)(yg(x)-xg(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0,
\end{aligned}
$$

综上我们即证明了原不等式. □

3 其他杂例——计算广义积分

例 3.1 (Dirichlet(狄利克雷) 积分)**.** 我们有积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

证明 我们只需要注意到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}, \quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}$$

则

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y \\
=&\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

例 3.2. 证明下面概率积分:

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证明 注意到:

$$\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x,$$

而对任意 $a \in \mathbb{R}$，有 $D_1 \subseteq D \subseteq D_2$，其中

$$D_1 = \left\{x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq a^2\right\}, \quad D_2 = [0,a]^2, \quad D_3 = \left\{x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 2a^2\right\}.$$

则我们事实上有

$$\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D_2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而

$$\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a} r\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right),$$

$$\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a} r\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right).$$

从而令 $a \to \infty$，则由夹逼定理可知即证. □