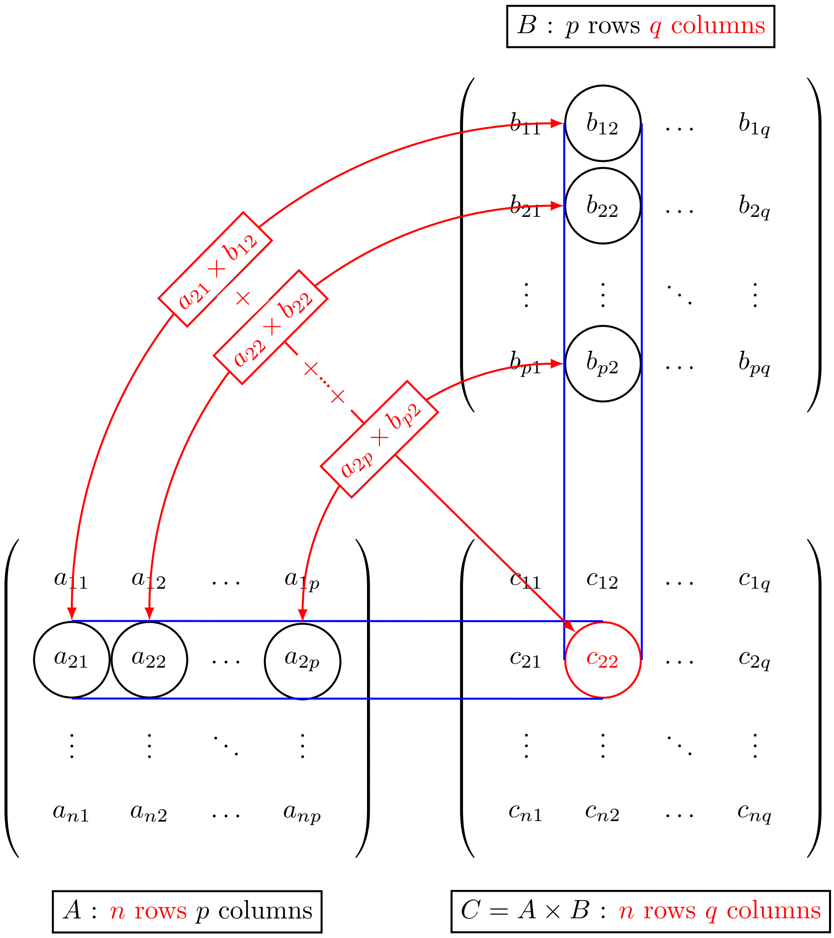
高等代数与解析几何 2-1

习题课讲义与作业



栗慧曦　朱凯

南开大学　数学科学学院

前言

这是笔记的前言部分.

链接: 线上数学运算程序 Wolfram Alpha

链接: 线上 Latex 程序

链接: 邓少强老师的习题课视频

链接: 南开数院试题汇总 (注意里面很多题是错的)

链接: 关于全国大学生数学竞赛，你想知道的都在这里了（附全国赛历届全部真题 PDF 下载）

链接: 数学竞赛《数学专业组》预赛竞赛大纲

高等代数部分

一、多项式

1. 数域与一元多项式的概念

2. 多项式整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法

3. 互素、不可约多项式、重因式与重根.

4. 多项式函数、余数定理、多项式的根及性质.

5. 代数基本定理、复系数与实系数多项式的因式分解.

6. 本原多项式、Gauss 引理、有理系数多项式的因式分解、Eisenstein 判别法、有理数域上多项式的有理根.

7. 多元多项式及对称多项式、韦达 (Vieta) 定理.

二、行列式

1. n 级行列式的定义.

2. n 级行列式的性质.

3. 行列式的计算.

4. 行列式按一行（列）展开.

5. 拉普拉斯 (Laplace) 展开定理.

6. 克拉默 (Cramer) 法则.

三、线性方程组

1. 高斯 (Gauss) 消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解.

2. n 维向量的运算与向量组.

3. 向量的线性组合、线性相关与线性无关、两个向量组的等价.

4. 向量组的极大无关组、向量组的秩.
5. 矩阵的行秩、列秩、秩、矩阵的秩与其子式的关系.
6. 线性方程组有解判别定理、线性方程组解的结构.
7. 齐次线性方程组的基础解系、解空间及其维数

四、 矩阵

1. 矩阵的概念、矩阵的运算 (加法、数乘、乘法、转置等运算) 及其运算律.
2. 矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系.
3. 矩阵的逆、伴随矩阵、矩阵可逆的条件.
4. 分块矩阵及其运算与性质.
5. 初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形.
6. 分块初等矩阵、分块初等变换.

五、双线性函数与二次型

1. 双线性函数、对偶空间
2. 二次型及其矩阵表示.
3. 二次型的标准形、化二次型为标准形的配方法、初等变换法、正交变换法.
4. 复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性、惯性定理.
5. 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵

六、线性空间

1. 线性空间的定义与简单性质.
2. 维数，基与坐标.
3. 基变换与坐标变换.
4. 线性子空间.
5. 子空间的交与和、维数公式、子空间的直和.

七、线性变换

1. 线性变换的定义、线性变换的运算、线性变换的矩阵.
2. 特征值与特征向量、可对角化的线性变换.
3. 相似矩阵、相似不变量、哈密尔顿-凯莱定理.
4. 线性变换的值域与核、不变子空间.

八、若当标准形

1. 矩阵.
2. 行列式因子、不变因子、初等因子、矩阵相似的条件.
3. 若当标准形.

九、欧氏空间

1. 内积和欧氏空间、向量的长度、夹角与正交、度量矩阵.

2. 标准正交基、正交矩阵、施密特 (Schmidt) 正交化方法.

3. 欧氏空间的同构.

4. 正交变换、子空间的正交补.

5. 对称变换、实对称矩阵的标准形.

6. 主轴定理、用正交变换化实二次型或实对称矩阵为标准形.

7. 酉空间.

解析几何部分

一、向量与坐标

1. 向量的定义、表示、向量的线性运算、向量的分解、几何运算.

2. 坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算.

3. 向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角.

4. 向量的数量积、向量积和混合积的定义、几何意义、运算性质、计算方法及应用.

5. 应用向量求解一些几何、三角问题.

二、轨迹与方程

1. 曲面方程的定义：普通方程、参数方程 (向量式与坐标式之间的互化) 及其关系.

2. 空间曲线方程的普通形式和参数方程形式及其关系.

3. 建立空间曲面和曲线方程的一般方法、应用向量建立简单曲面、曲线的方程.

4. 球面的标准方程和一般方程、母线平行于坐标轴的柱面方程.

三、平面与空间直线

1. 平面方程、直线方程的各种形式，方程中各有关字母的意义.

2. 从决定平面和直线的几何条件出发，选用适当方法建立平面、直线方程.

3. 根据平面和直线的方程，判定平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系.

4. 根据平面和直线的方程及点的坐标判定有关点、平面、直线之间的位置关系、计算他们之间的距离与交角等；求两异面直线的公垂线方程.

四、二次曲面

1. 柱面、锥面、旋转曲面的定义，求柱面、锥面、旋转曲面的方程.

2. 椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和主要性质，根据不同条件建立二次曲面的标准方程.

3. 单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性及求单叶双曲面、双曲抛物面的直母线的方法.

4. 根据给定直线族求出它表示的直纹面方程，求动直线和动曲线的轨迹问题.

五、二次曲线的一般理论

1. 二次曲线的渐进方向、中心、渐近线.

2. 二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点.

3. 二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径.

4. 二次曲线的主轴、主方向，特征方程、特征根.
5. 化简二次曲线方程并画出曲线在坐标系的位置草图.

建议: 保持 1 比 3 的课上课下时间比例.

建议: 趁着大一课程不太难的时候, 在保证成绩的前提下开拓视野.

链接: 我目前找到的最好的数学导论课！南开大学开设的【数学与应用数学专业导论课】

链接: 丘成桐大学生数学竞赛

链接: 阿里巴巴数学竞赛

栗慧曦　朱凯

2023 年 5 月 17 日

目录

1 多项式

1.1 第一次习题课

1.1.1 第一次习题课讲义

第一章知识点: 数域的概念、最大公因式的求法、多项式 $f(x) \in \mathbb{P}[x]$ 的标准分解式的求法、定理 6 的证明、定理 10 的证明、定理 11 的证明、判定 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 是否可约的方法等等.

注记:
高代书上的 $\partial(f(x))$ 指的是多项式 $f(x)$ 的次数.
高代书上的 “数域” 不同于 “number fields” (finite extensions of $\mathbb{Q}$).
在 $\mathbb{Z}$ 上做带余除法不同于在 $\mathbb{P}[x]$ 上做带余除法.

本次习题课的记录: 讲了与自然数有关的一些性质, 比如 well-ordering principle, $\sqrt{2}$ 是无理数, division algorithm, Euclidean algorithm, gcd 刻画定理, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$ 是一个域等等. 讲了群和域的定义, 给出了一些非数域的域的例子, 比如 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{Q}_p$.

1.1.2 第一次习题课作业

高等代数与解析几何——作业一

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数.

请勿使用 ∵ ∴ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **10 月 7 日的课堂上**，逾期视作零分.

基本习题

1. 注册 overleaf 账号或下载 Latex 软件. 使用 LaTeX 打出:

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, $\left\{\frac{n}{3} | n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. 写出以下词汇对应的英文:

域、复数、不可约多项式、多项式的首项系数、多项式的次数、商式、余式、最大公因子、存在与唯一、欧几里德算法（辗转相除法）、互素、标准分解式、重因子、二阶微商、重根、代数基本定理、本原多项式、Eisenstein 判别法.

提示: 下载电子书

- "Linear algebra and its applications" by Peter D. Lax;
- "Linear algebra and its applications" by David C. Lay, Steven R. Lay, and Judi J. McDonald;
- "Calculus early transcendental" by James Stewart;
- "Abstract Algebra" by Dummit & Foote.

习题 A: 数域、同态、同构

A1) 试求 $\mathbb{C}$ 的子集分别满足 (注意以下是独立的三问):

(1) 对加法、乘法及除法封闭但对减法不封闭； (2) 对加法、减法封闭但对乘法不封闭；

(3) 对加法不封闭，但对乘法封闭.

A2) 证明: 集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域.

A3*) 试求所有 $t \in \mathbb{C}$ 使得集合 $\mathbb{Q}(t) = \{a + bt | a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域.

A4) 设 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ 为数域，称映射 $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ 为 $\mathbb{E}$ 到 $\mathbb{F}$ 的**同态**，如果

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta),$$

其中 α, β 为任意 $\mathbb{E}$ 中的元素，证明: 同态 φ 一定是单射.

A5) 设 $\mathbb{E},\mathbb{F}$ 为数域，称 $\mathbb{E},\mathbb{F}$ **同构**，如果存在可逆映射 $\varphi:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ 使得

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\quad \varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta),$$

其中 α,β 为任意 $\mathbb{E}$ 中的元素，证明此时我们有:

(1)$\varphi(1)=1$；　　(2) 对任意 $a\in\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{E}$，有 $\varphi(a)=a$.

习题 B: 多项式的差分

对任意 $f(x)\in\mathbb{P}[x]$，定义 $f(x)$ 的**差分**为

$$\Delta f(x)=\Delta^1 f(x)=f(x+1)-f(x),$$

$$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x)),\quad n\geq 2.$$

B1) 若 $\deg f(x)\geq 1$，证明: $\deg(\Delta f(x))=\deg f(x)-1$；

B2) 对任意 $k\in\mathbb{N}^+$，证明: $\Delta^k f(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i f(x+i)$；

B3) 若 $\deg f(x)=n$，$f(x)$ 首一，证明: $\Delta^n f(x)=n!$；

B4) 证明: $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k(n-k+1)^n=n!$.

拔高习题

习题 C: 多项式概念、整除综合题

C1) 对任意正整数 m,n,ℓ，证明: $x^2+x+1\,\big|\,x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3\ell+2}$；

C2*) 设 $n\in\mathbb{N}^*$，给定 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$，求所有的 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$f(f(x))=a_n(f(x))^n+a_{n-1}(f(x))^{n-1}+\cdots+a_1 f(x)+a_0.$$

C3*) 设 $a_0>a_1>\cdots>a_n>0$，证明: 对任意复数 $|z|\leq 1$，均有

$$f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0\neq 0.$$

国庆节快乐!

1.2 第二次习题课

1.2.1 第二次习题课讲义

题目选讲:

1. 求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 在 $\mathbb{C}$ 中有重根.

   Answer: $3, -\frac{15}{4}$.

2. 求 $f(x)=x^4-4x^3+1$ 与 $g(x)=x^3-3x^2+1$ 的最大公因式.

   Solution: 2019-2020 学年高等代数与解析几何 2-1 (伯苓班) 期中考试试题第一题

3. 令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$. 证明 $f(x)$ 的三个根的实部都是负数的充分必要条件是 $a>0$, $ab>c$, $c>0$.

   Solution: 2019-2020 学年高等代数与解析几何 2-1 (伯苓班) 期中考试试题第四题

4. 令 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$, 其中 $n>m$ 为正整数, a 和 b 为实数且 $b\neq 0$. 证明 $f(x)$ 的任何一个根的重数小于等于 2.

   Solution: 2019-2020 学年高等代数与解析几何 2-1 (伯苓班) 期中考试试题第六题

5. 对多项式 $f(x)$, 记 $\delta(f)$ 为其最大实根和最小实根之间的距离. 设 $n\geq 2$ 为自然数. 求最大的实数 C, 使得对任意所有实根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有

$$\delta(f')\geq C\delta(f).$$

   Solution: 第八届《数学类三、四年级》数学竞赛决赛第四题

6. 设 a 为实数, 求关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件.

   Solution: 第八届《数学类一、二年级》数学竞赛决赛第一题

1.2.2 第二次习题课作业

高等代数与解析几何——作业二

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数.

请勿使用 ∵ ∴ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **10 月 14 日的课堂上**，逾期视作零分.

习题 A: 多项式的整除、带余除法

A1) 用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

(1)$f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$;

(2)$f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$.

A2) 求 m,n,ℓ 适合的条件使得下面整除关系成立:

(1)$x^2+mx-1|x^3+nx+\ell$;

(2)$x^2+mx+1|x^4+nx^2+\ell$.

A3*) 设 $\deg f(x)>0$，证明：$f'(x)\mid f(x)$ 当且仅当 $f(x)=a(x-b)^n$，$a,b\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}^*$.

习题 B: 最大公因式、Bezout 定理

B1) 利用辗转相除法计算 $f(x),g(x)$ 最大公因式:

$f(x)=x^4-10x^2+1,\ g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

B2) 利用辗转相除法求 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$:

$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

B3) 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1$，这里 (m,n) 表示 m，n 的最大公因式，并据此证明 $x^m-1|x^n-1$ 的充要条件为 $m|n$;

B4*) 求一组 $u(x),v(x)$ 使得成立 $u(x)x^m+v(x)(1-x)^n=1$.

习题 C: 多项式的根、因式分解与重因式

C1) 若 $f(x)\big|f(x^n)$，证明: $f(x)$ 的根只能是零或单位根 (即形如方程 $x^m-1=0$ 的根);

C2) 试求下列多项式的重因式:

(1) x^3+x^2+x+1;　　(2) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

C3) 证明: $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 没有重因式.

C4*) 设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 且 $\forall a\in\mathbb{R}$ 有 $f(a)\geq 0$，证明: 存在 $f_1(x),f_2(x)\in\mathbb{R}[x]$ 使得

$$f(x)=f_1(x)^2+f_2(x)^2;$$

习题 D: 多项式版本的 Fermat 大定理

D1) 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$，$N(f)$ 表示多项式 $f(x)$ 中不同根的个数，如 $N(x(x-1)^2) = 2$，证明:

$$N(f) = \deg\left(\frac{f}{(f, f')}\right),$$

这里 $\deg f$ 表示多项式的次数，f' 表示 f 的导数;

D2) 设 $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ 为三个两两互素的多项式，且 $f + g + h = 0$，证明:

$$(f, f') \left| \frac{g'}{(g, g')} \cdot \frac{h}{(h, h')} - \frac{g}{(g, g')} \cdot \frac{h'}{(h, h')} \right.;$$

D3*) 在 **D2 的条件**下，证明 Mason-Stothers 定理:

$$\max\{\deg f, \deg g, \deg h\} \leq N(fgh) - 1;$$

D4*) 借助 Mason-Stothers 定理，证明多项式版本的 Fermat 大定理:

设 $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ 且两两互素，若成立 $f^n + g^n = h^n$，证明: $n = 1$ 或 2.

1.3 第三次习题课

1.3.1 第三次习题课讲义

题目选讲:

1. 判断多项式 $x^4+4kx+1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否可约, 其中 $k\in\mathbb{Z}$.

Hint: let $x=y+1$ and consider the polynomial modulo 2.

2. Prove that the polynomial $x^6+30x^5-15x^3+6x-120$ can not be written as a product of two polynomials of rational coefficients and positive degrees.

Hint: consider the polynomial modulo 3.

Remark: Yau competition 2010 Individual Q1.

3. Let $n\geq 2$ be an integer and consider the Fermat equation

$$X^n+Y^n=Z^n, \qquad X,Y,Z\in\mathbb{C}[t].$$

Find all nontrivial solution (X,Y,Z) of the above equation in the sense that X, Y, Z have no common zeros and are not all constant.

Remark: Yau competition 2010 Team Q2. See here for the full solution.

4. Let c be a non-zero rational integer.

(a) Factorize the three variable polynomial

$$f(x,y,z)=x^3+cy^3+c^2z^3-3cxyz$$

over $\mathbb{C}$ (you may assume $c=\theta^3$ for some $\theta\in\mathbb{C}$).

(b) When $c=\theta^3$ is a cube for some rational integer θ, prove that there are only finitely many integer solutions $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ to the equation $f(x,y,z)=1$.

(c) When c is not a cube of any rational integers, prove that there are infinitely many integer solutions $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ to the equation $f(x,y,z)=1$.

Hint: take the square of both sides of the equation and guess how to construct a new solution from a given one. This is related to the Dirichlet's Unit Theorem.

Remark: Yau competition 2014 Team Q6.

5. Define the n-th cyclotomic polynomial $\Phi_n(x)$ to be the polynomial whose roots are the primitive n-th root of unity:

$$\Phi_n(x)=\prod_{\zeta \text{ primitive } \in\mu_n}(x-\zeta)=\prod_{\substack{1\leq a<n\\(a,n)=1}}(x-\zeta_n^a),$$

where μ_n is the group of n-th roots of unity over $\mathbb{Q}$. Compute the first few cyclotomic polynomials and prove $\Phi_n(x)$ is an irreducible monic polynomial in $\mathbb{Z}[x]$ of degree $\varphi(n)$.

Hint: we have

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

Remark: Dummit-Foote page 552.

1.3.2 第三次习题课作业

高等代数与解析几何——作业三

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数.

请勿使用 $\because$ $\therefore$ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **10 月 21 日的课堂上**，逾期视作零分.

关于整系数多项式的可约性问题是一个经典且困难的问题，从古至今关于不可约多项式判定的充分条件多如繁星，在本次作业中，我们将关注一些经典的判别方法。

习题 A: 不可约多项式、Eisenstein 判别法

A1) 判断下列多项式在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约:

(1) $x^4-2022x^3+1014x^2+2$；　　(2) x^p+px+1，p 为奇素数.

A2) 设 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为互不相等的素数，证明: 对正整数 $n\geq 2$，$\sqrt[n]{p_1!\cdot p_2!\cdots p_k!}$ 为无理数；

提示: 构造一个不可约多项式并以其为根.

A3) 证明: 对任意正整数 n，存在 n 次整系数不可约多项式，但恰有 n 个实根；

提示: $(x-2)(x-4)\cdots(x-2n)-2$.

A4*) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$，$|a_0|>|a_1|+\cdots+|a_n|$，$a_0$ 为素数，证明: $f(x)$ 不可约.

注: 这往往被称为 Perron 判别法.

习题 B: x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上的分解

B1) 证明：对任意 $n=2^q(2l+1)$，其中 $q,l\in\mathbb{N}^*$，有 x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上可约；

B2) 证明：对任意 2 的幂次 $n=2^q(q\geq 1)$，有 x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约；

提示: 利用初等数论中的 Kummer 定理，我们有任意 $1\leq k\leq 2^q-1$，均有 $\mathrm{C}_{2^q}^k$ 为偶数.

注: 综合 B1, B2 两问, 即可得到 x^n+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 不可约的充要条件是存在自然数 q, 使得 $n=2^q$.

B3) 设 $p\geq 3$ 为素数，证明：x^p+1 在 $\mathbb{Z}[x]$ 恰能分解成两个不可约多项式的乘积.

习题 C: Selmer 多项式在 $\mathbb{Z}[x]$ 上的可约性

Selmer 多项式是指 $f_n(x)=x^n-x-1$，他断言对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，$f_n(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约.

C1) 对任意 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，设其有 n 个根 $\alpha_i(1\leq i\leq n)$，定义

$$S(f)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i-\frac{1}{\alpha_i}\right),$$

证明：$S(f)=-a_{n-1}+\dfrac{a_1}{a_0}$，进而 $S(f)\in\mathbb{Q}$；

C2) 证明：对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，且 $f_n(\alpha)=0$，有

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} + \overline{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}} \geq \frac{1}{\alpha\overline{\alpha}} - 1;$$

C3) 若 $f_n(x)$ 可分解为 $g(x)h(x)$，其中 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$，$\deg g, \deg h < n$，证明：

$$S(g) \cdot S(h) = 0;$$

提示：考虑证明 $S(f)=1$ 且 $S(g) \geq 0$，$S(h) \geq 0$.

C4*) 在 C3 的假设下，证明：$x^2+x+1 \mid f_n(x)$；

C5) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}^*$，$x^2+x+1 \nmid f_n(x)$.

注 1: C4 与 C5 的结论产生矛盾，即说明 C3 的假设错误，从而完成了 Selmer 的断言的证明.

注 2: Selmer 在他的一篇论文中指出，$f_n(x)$ 的不可约性很难利用 Eisenstein 判别法与 Perron 判别法证明，大家不妨也浅浅试一下.

习题 D*: 一个难度很大的问题

设素数 $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_0$，$a_i \in \{0, 1, \cdots, 9\}$，证明：$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约.

扩展 E: 更多的不可约判别法

以下内容为视野扩展部分，**不作为作业习题!!** ，感兴趣的同学可以自行查阅相关文献作进一步了解与探讨：

E1)**Brown 判别法**

设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 次数为 n，定义集合

$$\mathbb{Z}f = \{|f(n)| \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, |f(-1)|, |f(0)|, |f(1)|, \cdots\},$$

用 $\mathbb{Z}f_1$，$\mathbb{Z}f_p$ 分别表示 $\mathbb{Z}f$ 中 1 的个数与素数的个数 (允许为无穷)，则当成立

$$2\mathbb{Z}f_1 + \mathbb{Z}f_p > n+4,$$

时，有 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约.

E2)**Polya 判别法**

设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 次数为 n，若存在 n 个不同整数 $m_1 (1 \leq i \leq n)$，使得

$$0 < |f(m_i)| < \frac{N!}{2^N}, \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$

其中 $N = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$，则有 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约.

E3)**Cohn 判别法** (习题 D 的一般情形：十进制推广到任意进制)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$，且存在 $b \geq 2$ 为整数使得 $f(b)$ 为素数，$0 \leq a_k \leq b-1 (0 \leq k \leq n)$，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约.

2 行列式

2.1 第四次习题课

2.1.1 第四次习题课讲义

注记: 第二章非常简单，计算的时候细心一点就好了. 定理 7 的结论比较重要. 建议快速读完前四章的内容, 因为第二到第四章应该作为一个整体来看.

本节课讲了初等行变换与解方程的关系、矩阵乘法的定义、初等行变换与矩阵乘法的关系、初等列变换与矩阵乘法的关系、左乘单位行向量的意义、右乘单位列向量的意义.

题目选讲:

1. 令

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

(1) 假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 若 $AF = FA$, 证明

$$A = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-1\ 1}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E;$$

Remark: 大学生数学竞赛第一届初赛第二题.

2. 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2$, $b = \frac{4}{3}$.

Remark: 大学生数学竞赛第四届初赛第七题第 1 小问.

3. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2017}$ 为 2016 阶实方阵. 证明: 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{2017}$ 的方程

$$\det(x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{2017}A_{2017}) = 0$$

至少有一组非零实数解.

Remark: 大学生数学竞赛第八届初赛第三题.

4. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的每个元素的绝对值都是 2, 证明当 $n \geq 3$ 时, 有

$$\det(A) \leq \frac{2^{n+1}n!}{3}.$$

Remark: 大学生数学竞赛第四届决赛第三题.

2.1.2 第四次习题课作业

高等代数与解析几何——作业四

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数.

请勿使用 $\because$ $\therefore$ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **10 月 28 日的课堂上**，逾期视作零分.

基本习题

1. 读完课本前四章的内容.
2. 使用 LaTeX 打出:

$\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \varepsilon, \delta, \tau, \sigma, \chi, \phi, \varphi, \psi, \Phi, \Psi, \ell.$

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

3. 写出以下词汇对应的英文:

排列、逆序数、对换、行列式、上三角矩阵、转置、列指标、初等行变换、阶梯型矩阵、余子式、代数余子式、齐次线性方程组.

4. 下载并安装Sage. 编写程序实现输入一个排列输出其逆序数.

习题 A: 排列、逆序数

设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，记 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 表示这个排列的逆序数.

A1) 求 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n) + \tau(i_n, i_{n-1}, \cdots, i_1)$；

A2) 证明：$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 等于利用**相邻元素对换**把该排列变成 $1, 2, \cdots, n$ 所需的最少次数；

A3) 证明：可以用不超过 $n-1$ 次**对换**将它化成 $1, 2, \cdots, n$；

A4*) 设 τ_n^k 为 $1, 2, \cdots, n$ 逆序数为 k 的排列的个数，证明：

$$\sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \tau_n^k \cdot x^k = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

注: 利用 A4 就可以解决复旦大学 2022 每周一题 A02，参见谢启鸿老师博客.

习题 B: 利用行列式的组合定义计算

B1) 计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

B2) 若 n 阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 n^2-n 个，证明：这个行列式的值等于 0；

B3*) 设 A 是一个 2022 阶方阵，其对角元全为 0，而其他元素为 2021 或 2023，证明：$|A| \neq 0$.

习题 C: 2020 级伯苓动态进出高代第 1 题——行列式的基本性质

将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 2^n 个不同子集记作 $A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}$. 定义一个 2^n 阶方阵 B 如下：如果 $A_i \cap A_j = \varnothing$，则 B 的第 i 行第 j 列元素为 1，否则该元素为 0(其中 $1 \leq i,j \leq 2^n$).

C1) 当 $n=1$ 且 $A_1=\varnothing, A_2=\{1\}$ 时，求出对应方阵 B 的行列式；

C2) 证明：$|B|$ 与 2^n 个子集的顺序无关；

C3*) 求 $|B|$.

2.2 第五次习题课

2.2.1 第五次习题课讲义

题目选讲:

1. (2019 期中考试第二题第一问) 求矩阵 $\begin{pmatrix} t+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & t+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & t+a_nb_n \end{pmatrix}$ 的行列式.

2. (2019 期中考试第二题第二问) 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \\ x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 & x_5^6 \end{pmatrix}$ 的行列式.

3. (2015 期末考试第三题) 求矩阵 $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ 的行列式.

4. (2015 期中考试第 2 题) 求矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \gamma & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma & \gamma & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$ 的行列式.

5. 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素且该非零元素为 1, 求 $\sum_{A\in\Gamma}\det(A)$.

Remark: 大学生数学竞赛第七届决赛第一 (1) 题.

6. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 求矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ 的行列式.

Remark: 大学生数学竞赛第八届决赛第一 (1) 题.

2.2.2 第五次习题课作业

高等代数与解析几何——作业五

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数.

请勿使用 ∵ ∴ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **11 月 4 日的课堂上**，逾期视作零分.

习题 A: 行列式的计算方法——各行 (列) 元素和相等的行列式

若一个行列式各行 (或列) 和相等，则可以将这些行 (列) 加起来，提取因子后往往可以计算出行列式的值来，这种方法简称为求和法.

A1) 计算 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

A2) 设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A3*) 计算 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

习题 B：Cramer 法则与应用

B1) 用 Cramer 法则解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

B2) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 中互不相同的数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 中任一组给定的数，用 Cramer 法则证明 Lagrange **插值公式**：

存在唯一的数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式 $f(x) = c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}$ 使得

$$f(a_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

B3*) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个复数，满足

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = r \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = r \\ \vdots \\ \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} + \cdots + \lambda_n^{n+1} = r \end{cases},$$

其中 $0 \le r \le n$ 为整数，尝试结合 Vander Monde 行列式证明：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中有 r 个为 1，$n - r$ 个为 0.

3 线性方程组

3.1 第六次习题课

3.1.1 第六次习题课讲义

概念解释: 刚体是指在运动中和受力作用后, 形状和大小不变, 而且内部各点的相对位置不变的物体. In physics, a rigid body (also known as a rigid object) is a solid body in which deformation is zero or so small it can be neglected.

提到了一般的线性空间的定义, 详见 p76 和 p164.

题目选讲:

1. 设 $\vec{\alpha_1}=(1,1,1,3)$, $\vec{\alpha_2}=(-1,-3,5,1)$, $\vec{\alpha_3}=(3,2,-1,x+2)$, $\vec{\alpha_4}=(-2,-6,10,x)$.

(1) 当 x 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\vec{\beta}=(4,1,6,10)$ 写成它们的线性组合.

(2) 当 x 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和它的一个极大线性无关组.

Remark: 2013 期中第 3 题. 考虑 $x=2$ 和 $x\neq 2$ 两种情形, 做初等行变换.

2. 有线性方程组 (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \end{cases}$ 和 (2) $\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t+1. \end{cases}$

(1) 用导出组的基础解系表示方程组 (1) 的一般解.

(2) 当 m, n, t 为何值时方程组 (1) 于 (2) 同解?

Remark: 2013 期中第 4 题, 做初等行变换, 第二小问没有答案, 题目有误.

3.1.2 第六次习题课作业

高等代数与解析几何——作业六

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数.

请勿使用 $\because$ $\therefore$ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **11 月 11 日的课堂上**，逾期视作零分.

基本习题

1. 使用 LaTeX 打出:

$\vec{v}$.

2. 写出以下词汇对应的英文:

列向量、数量乘积、自反性、对称性、传递性、等价、线性相关、秩、齐次线性方程组、特解、一般解.

习题 A：消元法解线性方程组

A1) 消元法解线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\ x_2-x_3+x_4=-3,\\ x_1+3x_2+x_4=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases};\qquad (2)\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0,\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2,\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4;\end{cases};\qquad (4)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1,\\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1\\ 5x_1+5x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

A2) 对不同的 λ 讨论下面这个线性方程组的解：

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

A3) 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ \quad x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=2,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\quad x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=n+1.\end{cases}$.

习题 B：线性相关性

B1) 把 $\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1)$ 表成 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$ 的线性组合；

B2) 已知 $n \geq 3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关向量组. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$ 也是线性无关向量组，证明：n 为奇数；

B3) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 r，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意 r 个线性无关的向量组都构成它的一个极大线性无关组；

B4) 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组；

B5) 有 $n+1$ 个同学, 他们都读过某 n 本书中的至少一本书. 证明在这 $n+1$ 个同学中可以找到甲乙两个小组, 甲组同学读过的书合在一起与乙组同学读过的书合在一起完全相同.

习题 C*：行列式保温练习

设

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-2 \\ 1 & 5 & 9 & \cdots & 4n-3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $n \geq 2$, A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式. 证明: $|\boldsymbol{A}| = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

3.2 第七次习题课

3.2.1 第七次习题课讲义

题目选讲:

1. 设 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_t}$ 是某齐次线性方程组的一个基础解系, $\vec{\beta}$ 不是这个方程组的解, 证明: $\vec{\beta}+\vec{\alpha_1},\vec{\beta}+\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\beta}+\vec{\alpha_t}$ 线性无关.

Remark: 2013 期中第 7 题. 使用基础解系和向量线性无关的定义即可.

2. 设 $\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}, \cdots, \vec{\eta_t}$ 是某个非齐次线性方程组的 t 个解向量, 问 $\vec{\eta_1}, \vec{\eta_2}, \cdots, \vec{\eta_t}$ 怎样的线性组合仍为该方程组的解向量.

Remark: 2013 期中第 8 题. 线性组合中的系数之和为 1 即可, 写证明的时候要仔细一点.

3. 若方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n+a_{1,n+1}=0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n+a_{2,n+1}=0 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\cdots+a_{m,n}x_n+a_{m,n+1}=0 \end{cases}$$

的解都是方程 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+c_{n+1}=0$ 的解, 求证 $(c_1,c_2,\cdots,c_{n+1})$ 可以被 $\vec{\alpha_i}=(a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n+1})$, $1\le i\le m$, 线性表出.

Remark: 2020 期末第五题. 考虑系数矩阵的秩.

4. 设 m 为给定的正整数. 证明: 对任何的正整数 n, l, 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n+X^l=I+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hint: 考虑 H^i, 其中

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remark: 大学生数学竞赛第六届初赛第五题.

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非零实矩阵, 证明: 若 A 的每一个元素 a_{ij} 都等于它的代数余子式, 则 A 的秩为 n.

Remark: 2013 期中第 6 题. 先证明其行列式为非负的.

3.2.2 第七次习题课作业

高等代数与解析几何——作业七

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数. 请勿使用 ∵ ∴ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **11 月** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+18)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+18}}\right]$ **日的课堂上**，逾期视作零分.

习题 A：矩阵的秩——初等变换与转化为列/行向量线性相关性

A1) 利用初等变换计算矩阵的秩：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$；

A2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2023×2023 阶矩阵，且主对角线上元素全为 0，每行恰有 1011 个 1111 和 1011 个 -1111，证明：$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2022；

A2.5) 二食堂二楼某窗口一次性出餐了 $2n+1$ 盘孜然羊肉, 从其中任意拿走一盘, 剩下的孜然羊肉都可以分成两堆, 每堆 n 盘, 总重量相等. 证明: 每盘孜然羊肉的重量都相等；

A3*) 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为**对角占优方阵**，如果有

$$|a_{ii}|>\sum_{1\le j\le n,\ j\ne i}|a_{ij}|,\quad i=1,2.\cdots,n,$$

证明：$\boldsymbol{A}$ 的秩为 n，也即 $|\boldsymbol{A}|\ne 0$.

习题 B：线性方程组有解判别定理与解的结构

注：从 B1) 到 B3) 中任选至少两题作答即可.

B1) 采访瑞士数学家 Cramer,Gabriel，并向他询问 Cramer 法则的提出与建立过程，以此为采访主题，撰写一份采访报告；

B2) 设 $x_1-x_2=a_1$，$x_2-x_3=a_2$，$x_3-x_4=a_3$，$x_4-x_5=a_4$，$x_5-x_1=a_5$，证明：这个线性方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5}a_i=0.$$

在有解的情形下，用基础解系表示出一般解；

B3) a, b 取什么值的时候，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b, \end{cases}$$

有解？在有解的情形下，用基础解系表示出一般解.

习题 C：一个比较困难的问题

设 $1, 2, 3, \cdots, n^2$ 排列成一个 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，我们关心 $\boldsymbol{A}$ 的秩的取值:

C1) 我们知道对矩阵作初等变换不改变其秩，从而不妨假设 1 位于左上角，再将第一行的最大元记为 $a_{1i} = M_1$，第一列的最大元记为 $a_{j1} = M_2$，证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & M_1 \\ M_2 & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 存在 2 阶非零子式，即 秩$(\boldsymbol{A}) \geq 2$;

C2*) 对任意 $2 \leq k \leq n$，构造一个排列成的矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得其秩为 k.

注 1: 由此我们可知这样的矩阵秩的取值范围为 $\{2, 3, \cdots, n\}$;

注 2: 关于 C2 的构造，如果你觉得没什么思路，可以询问助教，或者点开 Overleaf 文档中图片 1.jpg 即为一个可能的构造，可以作为参考.

4 矩阵

4.1 第八次习题课

4.1.1 第八次习题课讲义

题目选讲:

1. 已知 $A+B=2E$, $B^*=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求矩阵 X 使得 $AX=B$.

Remark: 2015 期末第五题.

Hint: 由 $BB^*=\det(B)E_{3\times 3}$ 推出 $\det(B)\det(B^*)=(\det(B))^3$.

2. 证明: 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q 使得 $A=PQ$.

Remark: 2015 年期末第八题.

Hint: $\begin{pmatrix}I_{r\times r}&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{r\times r}\\O_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{r\times r}&O_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}$.

4.1.2 第八次习题课作业

高等代数与解析几何——作业八

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数. 请勿使用 $\because$ $\therefore$ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **11 月 25 日的课堂上**，逾期视作零分.

基本习题

1. 写出以下词汇对应的英文:

数量矩阵、转置、非退化、逆、伴随矩阵、矩阵分块.

2. 阅读解析几何相关的内容, 熟悉之前期末考试中的相关题目.

习题 A：矩阵的基本运算——加减乘与幂次

A1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$;

A2) 计算: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$;

A4) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的每行元素之和均为 a，证明任意 $m\in\mathbb{N}^*$，$\boldsymbol{A}^m$ 的每行元素之和均为 a^m;

A5) 证明: $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-k}=\begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} & \mathrm{C}_n^2x^{n-2} \\ 0 & x^n & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}$;

注: 这种拆分的方法很具有启发性，在算矩阵的高次幂有着重要价值，可以仔细体会.

A6*) 设 n 为正整数，λ 为非零实数，计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\lambda}{n} \\ -\dfrac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$，这里一列矩阵的极限矩阵即为每个位置对应的数列取极限.

习题 B：可交换的矩阵

我们知道矩阵的乘法运算一般是不可交换的，那么对**可交换**的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，一般都需要 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 之间满足一些额外的性质:

B1) 求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$；

B2) 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，且每个 a_i 互不相同，证明：与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只可能是对角矩阵；

B3*) 证明：与所有 n 阶矩阵可交换的矩阵只能是 n 阶数量矩阵，即 $a\boldsymbol{E}_n$.

B4**)**本题不作为作业要求** (2022 **全国大学生数学竞赛第三题**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，其元素均为正整数且行列式为 1，证明：存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^k$.

习题 C：特殊的矩阵——幂等矩阵与幂零矩阵

C1*) 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**幂等矩阵**，如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为幂等矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$；

C2*) 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**幂零矩阵**，如果存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶上三角矩阵且主对角线上元素全为零，证明：$\boldsymbol{B}$ 为幂零矩阵.

4.2 第九次习题课

4.2.1 第九次习题课讲义

题目选讲:

0. 思考并解释以下结论:

(第 111 页) 根据矩阵加法的定义, 应用关于向量组的秩的性质, 很容易看出

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

(第 119 页) 根据定理 3 容易看出, 对于 n 阶方阵 A, B, 如果 $AB=E$, 那么 A, B 就都是可逆的并且它们互为逆矩阵.

1. 已知分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 中 A 可逆, 求证: $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Remark: 2015 期末第六题.

Hint: $\begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ -CA^{-1} & I_{n\times n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{m\times m} & B_{m\times n} \\ C_{n\times m} & D_{n\times n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{m\times m} & -A^{-1}B \\ 0_{n\times m} & I_{n\times n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

2. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 和 $B_{n\times m}$ 满足 $2E_m-AB$ 的秩为 $m-n$, 求证: $BA=2E_n$.

Remark: 2020 年期末第七题.

Hint: 用和上一题类似的技巧证明 $\operatorname{rank}(2E_m-AB)-m=\operatorname{rank}(2E_n-BA)-n$.

3. 给定非零实数 a 及 n 阶反对称矩阵 A, 记

$$S=\{(X,Y)|X\in\mathbb{R}^{n\times n}, Y\in\mathbb{R}^{n\times n}, XY=aI+A\},$$

证明: 任取 $(X,Y),(M,N)\in S$, 必有 $XN+Y^TM^T\neq O$.

Remark: 大学生数学竞赛第九届初赛第四题.

4. 设 $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$.

(1) 证明一下两条件等价: (i)A 可逆且 $A^{-1}\in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$; (ii) $|\det(A)|=1$.

(2) 若 $A, A-2B, A-4B,\cdots, A-2nB, A-2(n+1)B,\cdots, A-2(n+n)B$ 皆可逆, 且其逆矩阵均属于 $M_{n\times n}(\mathbb{Z})$, 证明 $A+B$ 可逆.

Remark: 大学生数学竞赛第十届初赛第三题.

4.2.2 第九次习题课作业

高等代数与解析几何——作业九

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数. 请勿使用 ∵ ∴ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **12 月 2 日的课堂上**，逾期视作零分.

习题 A：矩阵乘积的行列式

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，这个结论可以用来简化某些行列式的计算，方法是通过将要计算的行列式通过矩阵乘法化为两个容易计算的行列式之积，再分别计算出两个行列式，将结果求积即可.

A1) 分解下面这个矩阵从而计算行列式：

$$\begin{pmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{pmatrix}.$$

A2) 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 1)$，$s_0 = n$，分解下面这个矩阵从而计算行列式：

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

习题 B：矩阵的伴随与矩阵的逆

在未介绍初等矩阵之前，计算矩阵的逆往往只有计算伴随矩阵，以及利用待定系数法去凑逆矩阵两种办法，伴随矩阵的性质大家可以在刘秀贵老师课件中学习，本题中不再关心矩阵的伴随问题，而是讨论一些“特殊矩阵”的逆.

解决下面这些问题的核心在于：“凑出”可能形状的矩阵，直接验证与原来的矩阵相乘为 $\boldsymbol{I}_n$.

B1) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AB}$，证明：$\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 可逆；

B2) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ 可逆，且其逆为 $\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$；

B3) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均可逆, 证明: $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且其逆为 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

注: 做到这里，大家就一定会产生这样一个问题：逆矩阵是如何找到的呢？简单的来讲，以 B2) 为例, 可以很 “粗糙” 的做下面这样的分析 (当然这是不完全正确的, 仅仅形式上可以这么理解):

$$\frac{1}{I_n - BA} = I_n + BA + BA \cdot BA + \cdots = I_n + B(I_n + AB + \cdots)A = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A.$$

我们可以借助这个形式上的幂级数展开去猜测出逆元，那么我们所需要的工作就是验证这个确实是逆元，这个就是所谓的 Jacobson 引理，可以理解为“过河拆桥”.

B4*) 设 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|>0$，又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{I}_n$，证明：$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 不可逆.

习题 C：分块矩阵与 Kronecker 积

分块矩阵的运算需要一段时间的适应与熟悉，这部分最重要的应用在于分块矩阵的初等变换，是我们下次作业重点关注的问题，本题我们关心分块矩阵与 Kronecker 积:

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 分别是 $m\times n$ 阶和 $k\times l$ 阶矩阵，定义他们的 Kronecker 积为一个 $mk\times nl$ 阶矩阵:

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

利用定义不难验证 Kronecker 积具有以下四条性质，大家自行验证不难，**不作为作业题**:

1. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$;
2. $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$;
3. $(k\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\otimes(k\boldsymbol{B})$;
4. $\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_{mn}$.

请大家继续证明下面四条性质，其中上面的性质可以不加证明的直接引用

C1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\otimes(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D})$;

C2) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})$;

C3) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 也是可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}$;

C4*) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|^m$.

4.3 第十次习题课

4.3.1 第十次习题课讲义

我们讨论了一些历年月考中的题目.

下面两道题就不讲了.

1. 求实数 a, b, c 使得 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$.

Remark: 大学生数学竞赛第七届决赛第一题第四小题.

2. 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $\vec{b}(t)$ 分别为

$$B(t) = (b_{ij}(t)), \quad \vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t))^T,$$

其中 $b_{ij}(t)$, $b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $\vec{b}(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0, 使得 $B(t_0)\vec{x} = \vec{b}(t_0)$ 成为关于 $\vec{x}$ 的相容线性方程组, 试证明: $d(t)$, $d_1(t)$, $\cdots$, $d_n(t)$ 必有次数大于等于 1 的公因式.

Remark: 第五届大学生数学竞赛初赛第二题.

4.3.2 第十次习题课作业

高等代数与解析几何——作业十

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数. 请勿使用 ∵ ∴ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间和地点为 **12 月 9 日的课堂上**，逾期视作零分.

如果因疫情影响无法线下上课，大家可以通过扫描全能王等软件**扫描作业并以 PDF** 的形式通过**微信或飞书**发给助教朱凯同学.

习题 A：分块矩阵下的降阶公式

利用分块矩阵的分块初等变换，我们可以分别得到如下行列式和秩版本的降阶公式

若 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{D}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，则

$$|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right| = \begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}|\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\right|;$$

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = \text{秩}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} = \text{秩}(\boldsymbol{D})+\text{秩}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}).$$

这大家可以对比这两个降阶公式，细细体会它在下面这些作业题中的应用，在高代 II 中我们还将看到对称矩阵的正负惯性指数也满足降阶公式.

为什么叫上述公式为降阶公式呢？因为求较大阶矩阵的行列式和秩时，我们若将其凑成 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的形式，这里一般 $\boldsymbol{A}$ 是个低阶的矩阵，则利用上面那个公式，就可以把问题转化为求 $\boldsymbol{D}$ 的秩和一个低阶矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的秩.

A1) 证明上面两个降阶公式；

A2) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{P}^{n\times 1}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{\alpha}=3$，计算 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}|$；

A3) 求下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A4*) 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$ 的秩的所有可能值.

习题 B：相抵标准型的运用

相抵标准型 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 在研究矩阵的分解、表示里能发挥很好的作用，这部分问题比较套路，思路基本上就是先设出相抵标准型，再结合条件对 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 或其他矩阵作适当分块，得到一些性质后在带回原来去配凑.

B1) 证明：秩等于 r 的矩阵可以表示为 r 个秩等于 1 的矩阵之和, 但不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵之和.

B2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：若 秩$(\boldsymbol{A})=m$，即 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵，则必存在秩等于 m 的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}_m$；

B3*) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 秩$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=$秩$(\boldsymbol{A})\cdot$秩$(\boldsymbol{B})$；

B4*) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，证明：存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

习题 C：幂等矩阵的性质（一道世界大学生数学竞赛题）

C1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵，且其相抵标准型为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$ ，则代入 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 这个条件，并对 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分块，有 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}_3 & \boldsymbol{Q}_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 \\ \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{P}_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 根据上面这些推导，进一步证明：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{P}_3)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{Q}_2)=r=$秩$(\boldsymbol{A})$；

C2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 是 n 阶幂等矩阵，且任意 $1\le i<j\le k$，有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=-\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i$，证明：$\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_k$ 因为幂等矩阵，进一步 秩$(\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_k)=$秩$(\boldsymbol{A}_1)+\cdots+$秩$(\boldsymbol{A}_k)$；

C3) 证明：$\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 中一定存在一个矩阵，其秩不超过 $\dfrac{n}{k}$.

5 解析几何 I

5.1 第十一次习题课

5.1.1 第十一次习题课讲义

题目选讲:

1. 求点 $(2,4,3)$ 在直线 $x=y=z$ 上的投影点以及它们之间的距离.

Remark: 2015 期末第四题.

2. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是空间中不共面的三个向量, 证明对于空间中任何一个向量 $\vec{d}$ 都有

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}=(\vec{d},\vec{b},\vec{c})\vec{a}+(\vec{d},\vec{c},\vec{a})\vec{b}+(\vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c}.$$

Remark: 2015 期末第七题、2020 期末第六题.

Remark: 见 2015 年期末第一题、第二题, 2020 年第三题、第四题等其他可能的题型.

3. 已知空间的两条直线

$$\ell_1:\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1},\quad \ell_2:\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}.$$

(1) 证明 ℓ_1 和 ℓ_2 异面.

(2) 求 ℓ_1 和 ℓ_2 公垂线的标准方程.

(3) 求连接 ℓ_1 上任意一点和 ℓ_2 上任意一点的线段中点的轨迹的一般方程.

Remark: 第六届大学生数学竞赛初赛第一题.

4. 设 ℓ_1 和 ℓ_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 ℓ_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 $\vec{v}$ 为直线方向; 直线 ℓ_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 $\vec{w}$ 为直线方向.

(1) 证明: 存在唯一点 $P\in\ell_1$ 和 $Q\in\ell_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 ℓ_1 和 ℓ_2.

(2) 用 $a,b,\vec{v},\vec{w}$ 表示 P 和 Q 点的坐标.

Remark: 第七届大学生数学竞赛初赛第一题.

5. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=6$, 求 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})$.

Remark: 第一届大学生数学竞赛决赛第一题第四问.

6. 已知两直线方程 $L:x=y=z, L':\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}$. 问: 当参数 a,b 满足什么条件时, L 与 L' 是异面直线?

Remark: 第一届大学生数学竞赛决赛第六题第一问.

5.1.2 第十一次习题课作业

高等代数与解析几何——作业十一

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数. 请勿使用 $\because$ $\therefore$ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间为 **12 月 16 日的课堂之前**，大家可以通过扫描全能王等软件**扫描作业并以 PDF** 的形式通过**微信或飞书**发给助教朱凯同学.

本次作业我们关心三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量积和混合积，也即，如果不特别说明，所考虑的向量均为 $\mathbb{R}^3$ 中的.

基本习题

1. 使用 LaTeX 打出:

   $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

2. 写出以下词汇对应的英文:

向量的模、数量积 (内积)、向量积、投影、混合积、平行六面体、右手规则

习题 A：向量的内积和外积

A1) 证明：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件为，存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

A2) 证明：设三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面，如果向量 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} = 0,$$

则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

A3) 证明：三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = 0.$$

A4*) 给定 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}$，$O$ 为原点，求满足方程 $\boldsymbol{a} \times \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{b}$ 的点 P 的轨迹.

习题 B：向量的混合积

为了方便起见，我们下面约定三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

B1) 证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$.

B2) 证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$.

B3) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，向量 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=m,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=n,\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=p,$$

证明：

$$\boldsymbol{x}=\frac{m(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+n(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}.$$

B4*) 已知向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 共面，向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 共面，设

$$\boldsymbol{c}_1=(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_3)\times(\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{b}_2),$$
$$\boldsymbol{c}_2=(\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{b}_1)\times(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_3),$$
$$\boldsymbol{c}_3=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_2)\times(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_1),$$

证明：$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3$ 共面.

5.2 第十二次习题课

5.2.1 第十二次习题课讲义

题目选讲:

1. 设有空间中五点

$$A(1,0,1), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,1,0), E(3,1,2)$$

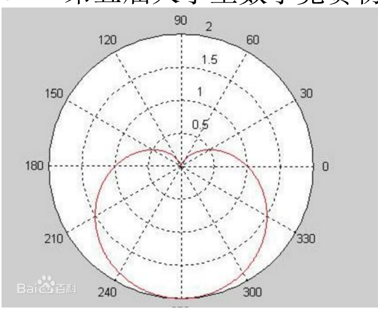
试求过点 E 且与 A,B,C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

Remark: 第三届大学生数学竞赛决赛第一题.

Remark: 大学生数学竞赛中还有一些平面解析几何的题目, 它们与数学分析的相关性更大.

2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1, C_2 外切于 P 点, 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周滚动一周, 则点 P 的轨迹 Γ 是心脏线. 设 C 为以 P 的初始位置为圆心的圆, 其半径为 R. 记 $\gamma : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换, 它将 $Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 满足 $\vec{PQ} \cdot \vec{PQ'} = R^2$. 求证: $\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

Remark: 第五届大学生数学竞赛初赛第一题.



5.2.2 第十二次习题课作业

高等代数与解析几何——作业十二

请在**南开大学作业纸**正面用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并填写系别、班级、姓名与作业页数. 请勿使用 $\because$ $\therefore$ 等符号. 数字和算式不能作为一段话的开头.

本次作业的提交时间为 **13 月 32 日之前**，大家可以通过扫描全能王等软件**扫描作业并以 PDF** 的形式通过**微信或飞书**发给助教朱凯同学.

编辑文档可能要用到的资料

这个部分是将来可能会用的材料，方便编辑使用, 不具有时效性, 无需查看.

第五章: 二次型

椭圆、双曲线称为有心二次曲线, 抛物线称为无心二次曲线.

Sylvester's law of inertia is a theorem in matrix algebra about certain properties of the coefficient matrix of a real quadratic form that remain invariant under a change of basis. Namely, if A is the symmetric matrix that defines the quadratic form, and S is any invertible matrix such that $D = SAS$ is diagonal, then the number of negative elements in the diagonal of D is always the same, for all such S; and the same goes for the number of positive elements. This property is named after James Joseph Sylvester who published its proof in 1852.

基本习题

1. 使用 LaTeX 打出:

2. 写出以下词汇对应的英文:

半正定二次型、合同变换、规范形、惯性定理、符号差、顺序主子式.

3. 熟悉定理 4 的证明.

设 A 为 $n \times n$ 实矩阵 (未必对称), 对任一 n 维实向量 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都有 $\vec{\alpha} A \vec{\alpha}^T \geq 0$, 且存在 n 维实向量 $\vec{\beta}$ 使得 $\vec{\beta} A \vec{\beta}^T = 0$. 若对任意 n 维实向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$, 当 $\vec{x} A \vec{y}^T \neq 0$ 时都有 $\vec{x} A \vec{y}^T + \vec{y} A \vec{x}^T \neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 $\vec{v}$, 都有 $\vec{v} A \vec{\beta}^T = 0$.

Remark: 第二届大学生数学竞赛初赛第六题.

设 A, B, C 均为 n 阶正定矩阵, $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = \det P(t)$, 其中 t 为未定元. 若 λ 是 $f(t)$ 的根, 试证明: $\Re(\lambda) < 0$.

Remark: 第四届大学生数学竞赛初赛第四题.

2. 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明: A 合同于 B 的充要条件是 $a < 2$, $b = 3$.

Remark: 大学生数学竞赛第四届初赛第七题第 3 小问.

第六章、第七章: 线性空间和线性变换

假设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, f, g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg - gf = f$, 证明: f 的

特征值都是 0, 且 f, g 有公共特征向量.

Remark: 第一届大学生数学竞赛初赛第三题.

. 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$, $X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ 无解.

Remark: 第二届大学生数学竞赛初赛第二题.

. 设 A, B 分别是 3×2, 2×3 实矩阵, 若有 $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 BA.

Remark: 第三届大学生数学竞赛决赛第五题.

设 $V = F^n$ 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma : F^n \to F_n$ 是一个线性变换. 若对任意的 $A \in M_{n\times n}(F), \vec{\alpha} \in F^n$ 都有 $\sigma(A\vec{\alpha}) = A\sigma(\vec{\alpha})$, 证明: $\sigma = \lambda \mathrm{Id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中的某个数.

Remark: 第三届大学生数学竞赛初赛第三题.

设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 在 F 上相似于 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵. Remark: 第三届大学生数学竞赛初赛第六题.

已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2$, $b = \frac{4}{3}$. A 相似于 B 的充要条件是 $a = 3$, $b = \frac{2}{3}$.

Remark: 第四届大学生数学竞赛初赛第七题第 2 小问.

设 E_{ij} 为 (i,j) 位置为 1, 其余位置为 0 的 n 阶方阵. 令 Γ_r 为秩等于 r 的 n 阶实方阵全体, 并让 $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 为可乘映射. 证明:

(1) 对任意 $A, B \in \Gamma_r$, $\mathrm{rank}(\phi(A)) = \mathrm{rank}(\phi(B))$.

(2) 若 $\phi(0) = 0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W) \neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$ 对于一切 E_{ij} 皆成立.

第八章: λ-矩阵

第九章: 欧几里得空间

第十章: 双线性函数与辛空间

解析几何第二部分: 二次曲面

求经过三平行直线 $L_1 : x = y = z, L_2 : x - 1 = y = z + 1, L_3 : x = y + 1 = z - 1$ 的圆柱面的方程.

Remark: 第一届大学生数学竞赛初赛第一题.

已知二次曲面 Σ(非退化) 过以下九点:

$$A(1, 0, 0), B(1, 1, 2), C(1, -1, -2), D(3, 0, 0), E(3, 1, 2),$$

$$F(3, -2, -4), G(0, 1, 4), H(3, -1, -2), I(5, 2\sqrt{2}\ 8).$$

问 Σ 是哪一类曲面?

Remark: 第二届大学生数学竞赛初赛第五题.

求过四点 $(1, 2, 7), (4, 3, 3), (5, -1, 6), (\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ 的球面方程.

Remark: 第三届大学生数学竞赛初赛第一题.

设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$. 从原定作 Γ 的切锥面. 求切锥面的方程.

Remark: 第四届大学生数学竞赛初赛第一题.

基本习题

1. 使用 LaTeX 打出:
2. 写出以下词汇对应的英文:

习题 C：向量代数在球面几何中的运用

设在球心为 O，半径为 1 的单位球面上，有不在同一大圆弧 (这里大圆指球面上半径为 1 的圆) 的三点 A,B,C，分别连接其中两点的大圆弧 $\alpha =\overset{\frown}{BC},\beta =\overset{\frown}{CA},\gamma =\overset{\frown}{CA}$ 围成一个区域，称为**球面三角形** (如下图)，其中 A,B,C 是它的**顶点**，α,β,γ 是它的**边**，这里我们用边所在的大圆弧的弧度来度量. 边 β 与 γ 所夹的角是指由 β 与 γ 分别所在的平面组成的二面角，仍记作 A，称为球面三角西的**内角**.

注：这部分更详细完整的定义和内容可以参考 (老版) 高中数学人教版选修 3-3.